# ÜBER TOPOLOGISCHE VEKTOR-GRUPPEN

Pawel Lurje

1972

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546014_0022

# ÜBER TOPOLOGISCHE VEKTOR-GRUPPEN

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE
DER FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK DER
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

VORGELEGT VON
PAWEL LURJE
AUS MÜNCHEN
IN MAI 1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke
2. Berichterstatter: Professor Dr. E. Wienholtz

Tag der mündlichen Prüfung: 22 Dezember 1972

## EINLEITUNG

In [10] hat V. Pták einen Satz, den er von Banach-Steinhaustyp nennt, bewiesen. Der Ptak'sche Beweis griff auf eine alte Methode zurück, bekannt unter dem Schlagwort „der gleitende Buckel". Ein Ziel dieser Arbeit ist es, den Satz von Pták unter Vermeidung der Methode des gleitenden Buckels zu beweisen und zu untersuchen, ob sich dieser Satz auf allgemeinere Raumtypen übertragen läßt.

Die Bestrebungen, die Buckelmethode zu eliminieren, führten zur Betrachtung von topologischen Vektorgruppen. Das sind topologische Vektorräume über dem diskreten Körper $\mathbb{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen; sie sind von D.A. Raikov und P. Kenderov (vgl. [5] und [11]) betrachtet worden. Die Einführung eines Tonneliertheitskonzepts in lokalkonvexen Vektorgruppen gestattet es, den Satz von Banach-Steinhaus auf solche Räume zu übertragen. Es stellt sich heraus, daß bei einer geeigneten Topologisierung des zur Diskussion stehenden lokalkonvexen Raums im Satz von Pták dieser Raum eine tonnelierte lokalkonvexe Vektorgruppe wird. Der Satz von Pták folgt dann durch direkte Anwendung vom Banach-Steinhaus.

Um den Satz von Pták auf allgemeinere Raumtypen zu übertragen, war nun folgender Weg vorgezeichnet: Man wende den Topologisierungsprozeß auf lokalkonvexe Räume an, und untersuche, ob sich dabei tonnelierte Vektorgruppen ergeben. Dieser Plan wird in den Kapiteln V und VI realisiert. Es ergeben sich so Verallgemeinerungen auf allgemeinere Raumtypen. Andererseits erhält man auch Gegenbeispiele, wenn die sich ergebenden Vektorgruppen nicht tonneliert sind.

Die Betrachtungen über lokalkonvexe Vektorgruppen und die Ergebnisse, die solche Betrachtungen im Falle des Satzes von Pták erzielten, ließen es wünschenswert erscheinen, eine allgemeine Theorie solcher Räume aufzustellen. Das allgemeine Vorgehen, das wir in dieser Arbeit befolgten, war stets, vom Allgemeinen zum Spezielleren vorzugehen. Dabei schien es mir zweckmäßig zu sein die Aussagen in der Sprache der Kategorien, die wir auf unsere spezielle Situation zugeschnitten haben, zu formulieren (vgl. Kapitel I). Eine weitere Konzeption war es, möglichst viele

Sätze der lokalkonvexen Theorie zu übertragen (vgl. Kapitel II, §2 und Kapitel III, §§1,3). Natürlich lag das besondere Gewicht der Arbeit bei den tonnelierten Vektorgruppen (Kapitel IV). Die Einführung eines Funktors loc von der Kategorie LCVG der lokalkonvexen Vektorgruppen in die Kategorie LCR der lokalkonvexen Räume gestattet es, Permanenzfragen der Tonneliertheit in LCVG auf solche in der Kategorie LCR zurückzuführen. Wir behandeln auch Graphensätze im Zusammenhang mit Tonneliertheit. Dabei befolgen wir das Konzept der Hypervollständigkeit von J. L. Kelley ( vgl. [4] ). Im Kapitel V wenden wir uns der speziellen Vektorgruppe zu, die dem Satz von Pták zugrunde liegt, und wenden die dabei gewonnenen Ergebnisse auf lokalkonvexe Räume an ( vgl. Kapitel VI ).

Bei meinen Untersuchungen hatte ich oft Gelegenheit mit Dipl. Math. S. Dierolf, Dipl. Math. V. Eberhardt, Dr. J. Elstrodt, Dr. H. Pfister und Prof. W. Roelcke zu diskutieren. Ich möchte Ihnen an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Mein ganz besonderer Dank gebührt Prof. W. Roelcke, der die vorliegende Arbeit angeregt hat.

## LISTE VON VERWENDETEN SYMBOLEN UND ABKÜRZUNGEN

| | |
|---|---|
| $\tilde{A}$ | Algebraischer Abschluß von A. |
| $[A]$ | Lineare Hülle von A. |
| $\Gamma(A)$ | Absolutkonvexe Hülle von A. |
| $H\|L$ | Menge der Einschränkungen von Elementen aus H auf L. |
| $N(H)$ | Menge auf der alle Elemente von H verschwinden (Nullstellengebilde von H). |
| $L(X,Y)$ | Menge der linearen Abbildungen von X in Y. |
| $L_c(X,Y)$ | Menge der stetigen linearen Abbildungen von X in Y. |
| $\mathfrak{U}_0[X]$ | oder $\mathfrak{U}_0[u]$ ist der Nullumgebungsfilter in (X,u) |
| $(X,u)$ | Topologische Vektorgruppe X mit Topologie u. |
| $X \oplus Y$ | Direkte Summe (algebraisch). |
| $X \overset{top}{\oplus} Y$ | Topologische direkte Summe. |

| | |
|---|---|
| l.k. | Abkürzung für lokalkonvex. |
| l.kf. | Abkürzung für lokalkreisförmig. |
| NU | Abkürzung für Nullumgebung. |
| NUB | Abkürzung für Nullumgebungsbasis. |
| NUSB | Abkürzung für Nullumgebungssubbasis. |
| R. | Abkürzung für Raum. |
| t.l. | Abkürzung für topologischer linearer. |
| V.G. | Abkürzung für Vektorgruppe. |

| | |
|---|---|
| LCR | Kategorie der lokalkonvexen Räume. |
| TLR | Kategorie der topologischen linearen Räume. |
| TOP | Kategorie der topologischen Räume |
| TOPAB | Kategorie der topologischen Abelschen Gruppen. |

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung Seite 3

Liste von verwendeten Symbolen und Abkürzungen 5

Inhaltsverzeichnis 6

Kapitel I: Vorbemerkungen über topologische Vektorgruppen 7
§1. Die Kategorie TVG 7
§2. Innere topologische direkte Summen; uniforme Struktur; Vollständigkeit; Halbmetrisierbarkeit 11

Kapitel II: Lokalkreisförmige Vektorgruppen 13
§1. Die Kategorie LKVG 13
§2. Teilräume in LKVG 14

Kapitel III: Lokalkonvexe Vektorgruppen 17
§1. Minkowskifunktionale, konvexe Mengen und inwendige Punkte 17
§2. Lokalkonvexe Vektorgruppen 19
§3. Der Satz von Hahn-Banach für lokalkonvexe Vektorgruppen 20

Kapitel IV: Tonneliertheit in lokalkonvexen Vektorgruppen 23
§1. Der Funktor loc 23
§2. Tonnelierte lokalkonvexe Vektorgruppen 25
§3. Tonneliertheit, Graphensätze und Open-Mapping Theorems 27

Kapitel V: Über die lokalkonvexe Vektorgruppe $(X,u_{\varpi\varpi})$ 31
§1. Die lokalkonvexe Vektorgruppe $(X,u_{\varpi\varpi})$ 31
§2. Tonneliertheitsfragen in $(X,u_{\varpi\iota})$ 33
§3. Geradenprodukte 37

Kapitel VI: Anwendungen auf lokalkonvexe Räume 39
§1. Verschiedene Sätze über lokalkonvexe Räume 39
§2. Verallgemeinerung eines Satzes von V. Pták 40
§3. Beispiele und Gegenbeispiele zum Satz von Pták 43
§4. Tonneliertheit von $L_c(X,Y)$ 45

Literaturverzeichnis 46

Lebenslauf 47

# KAPITEL I: VORBEMERKUNGEN ÜBER TOPOLOGISCHE VEKTORGRUPPEN

## §1. Die Kategorie TVG

### 1. Definition der Kategorie TVG.

Wir betrachten t.l.Re über dem diskreten Körper $\mathbb{K}$ der komplexen oder der reellen Zahlen. Diese Objekte heißen nach D. A. Raikov topologische Vektorgruppen (topologische Vektorgruppe kürzen wir ab mit t.V.G.). Die Kategorie dieser Objekte mit den stetigen linearen Abbildungen als Morphismen bezeichnen wir mit TVG. Nach D.A.Raikov [11] gilt:

BEHAUPTUNG 1.- Eine Gruppentopologie u auf dem $\mathbb{K}$-linearen Raum X ist genau dann eine Vektorgruppentopologie, wenn für jedes $\lambda \neq o$ und jede Nullumgebung U die Menge $\lambda U$ eine Nullumgebung ist.

Insbesondere bilden die t.l.Re und die l.k.Re volle Unterkategorien TLR und LCR von TVG.

### 2. Initial- und Finaltopologien in einer vollen Unterkategorie A von TVG.

Gegeben seien eine Familie $(X_i,u_i)_{i\in I}$ in A, ein $\mathbb{K}$-linearer Raum X und eine Familie $(f_i)_{i\in I}$ von linearen Abbildungen $f_i:X\longrightarrow X_i$ (bzw. $f_i:X_i\longrightarrow X$). Das Tripel $\mathcal{A}=(X,(X_i),(f_i))$ (bzw. $\mathcal{A}=((X_i),X,(f_i))$) nennen wir ein Initial- (Final-) System in A. Die gröbste (bzw. feinste) A-Topologie u, für die alle $f_i$ stetig sind, heißt die Initial- (Final-) Topologie von $\mathcal{A}$ in A. Man sagt oft einfacher, daß u die A-Initial- (A-Finaltopologie) der $(u_i)$ vermöge $(f_i)$ ist und läßt das Vorwort A- fort, sofern keine Zweifel darüber bestehen, in welcher Kategorie diese Topologie gebildet wird. Ist I einelementig, so spricht man von der Urbild- (Bildtopologie) von $u_i$ vermöge $f_i$, und ist zusätzlich $f_i$ injektiv (bzw. surjektiv), so heißt u eine Teilraum-(Quotientenraum-)topologie. Im letzten Fall schreiben wir $u=u_i|X$ (bzw. $u=u_i/N$, wobei $N=N(f_i)$). Weitere häufig vorkommende Spezialfälle sind $X=\prod_{i\in I} X_i$ und $f_i=pr_i$ für jedes $i\in I$ (bzw. $X=\bigoplus_{i\in I} X_i$ und $f_i:X_i\hookrightarrow X$ kanonisch für jedes $i\in I$). Wir schreiben $u=\prod_{i\in I} u_i$ (bzw. $u=\bigoplus_{i\in I} u_i$).

Im Allgemeinem braucht es bei Vorgabe eines Initial- (Final-) Systems in $\underline{A}$ keine Initial- (Final-) Topologie zu geben. Wir werden nun Voraussetzungen über $\underline{A}$ angeben, unter denen man Initial- oder Finaltopologien in $\underline{A}$ bilden kann. Wir bezeichnen mit E eine Eigenschaft von Mengen eines $\mathbb{K}$-linearen Raums. Die Kategorie $\underline{A}$ heiße eine E-Kategorie, wenn $X \in \underline{TVG}$ genau dann ein Objekt von $\underline{A}$ ist, wenn X eine Nullumgebungsbasis aus Mengen mit der Eigenschaft E hat. $\underline{TLR}$ und $\underline{LCR}$ sind zum Beispiel E-Kategorien. Im ersten Fall ist E die Eigenschaft "kreisförmig und absorbant", im zweiten Fall ist E "absolutkonvex und absorbant".
Wir werden im folgenden Eigenschaften E betrachten, die einer oder mehreren der Voraussetzungen in der untenstehenden Liste genügen.

(i) E ist invariant gegenüber der Bildung von endlichen Durchschnitten.

(ii) Die Urbilder bei linearen Abbildungen von Mengen mit E haben die Eigenschaft E.

(iii) E vererbt sich auf die Bilder bei surjektiven linearen Abbildungen.

(iv) Jeder $\mathbb{K}$-lineare Raum X hat E. ((iv) folgt aus (i) für die leere Indexmenge).

SATZ 1.- Es sei $\underline{A}$ eine E-Kategorie und E genüge den Voraussetzungen (i) und (ii). Dann bekommt man die Initialtopologie eines Initialsystems $\mathcal{A}$ in $\underline{A}$, indem man die Initialtopologie von $\mathcal{A}$ in der Kategorie $\underline{TOP}$ der topologischen Räume bildet.

Das folgt unmittelbar aus Beh.1 und den Voraussetzungen.

SATZ 2.- Es sei $\underline{A}$ eine E-Kategorie und E genüge (i), (ii) (und (iv)). Dann kann man in $\underline{A}$ Finaltopologien bilden.

B e w e i s: Es sei $\mathcal{A}=((X_i),X,(f_i))$ ein Finalsystem in $\underline{A}$ und $\mathcal{T}$ die Menge aller $\underline{A}$-Topologien auf X, so daß alle $f_i$ stetig sind. $\mathcal{T}$ ist nicht leer, denn wegen (iv) ist die triviale Topologie in $\mathcal{T}$. Nach Satz 1 existiert die Initialtopologie u von $(X,((X,t))_t,(id)_t)$ wobei $t \in \mathcal{T}$. Es ist u die Finaltopologie von $\mathcal{A}$.

Oft ist es wünschenswert mehr zu wissen als nur, daß man Finaltopologien bilden kann. Offenbar gilt:

SATZ 3.- Es sei (X,u) ein Objekt der E-Kategorie $\underline{A}$. E genüge der Voraussetzung (iii) der obigen Liste. L sei ein linearer Teilraum von X. Dann ist die Quotiententopologie v von X/L in $\underline{TOP}$ gleich der Quotiententopologie u/L von X/L in $\underline{A}$.

3. Bildungen in Kategorien und Bildungstreue Funktoren.

Für die Unterkategorie $\underline{A} \subset \underline{TVG}$ bezeichne $\varkappa(\underline{A})$ die Klasse aller Tripel $((A_i)_{i\in I},(B_k)_{k\in K},(f_{ki})_{(i,k)\in I\times K})$. Dabei sind $(A_i)$ und $(B_k)$ Familien in $\underline{A}$ und $f_{ki}:A_i \longrightarrow B_k$ stetige lineare Abbildungen für jedes $i\in I$ und $k\in K$. Unter einer Bildung $\Phi$ in $\underline{A}$ verstehen wir eine Abbildung $\Phi:\mathrm{Def}(\Phi)\longrightarrow \underline{A}$ mit $\mathrm{Def}(\Phi)\subset\varkappa(\underline{A})$.

Beispiele:

1) Es sei INIT($\underline{A}$) die Klasse aller Tripel $\mathcal{U}\in\varkappa(\underline{A})$, so daß I einelementig ist, und daß $A_i$ die Initialtopologie von $\mathcal{U}$ (aufgefaßt als Initialsystem) trägt. Die Bildung INIT ordnet $\mathcal{U}$ das Objekt $A_i$ zu.
2) Entsprechend INIT($\underline{A}$) wird die Klasse FINAL($\underline{A}$) definiert, und auf FINAL($\underline{A}$) definiert man analog die Bildung FINAL.
3) Es sei jetzt I=K gerichtet und $A_i=B_i$. Ferner gelte $f_{ki}=0$ wenn $i\neq k$ (bzw $i\not\geq k$). Wenn $i\geq k\geq l$ (bzw. $i\leq k\in l$), so sei $f_{li}=f_{lk}\circ f_{ki}$. Die so definierte Klasse bezeichnen wir mit PROJEKTIV($\underline{A}$) (bzw. INDUKTIV($\underline{A}$) ). Ist $\underline{A}$ eine E-Kategorie, wobei E den Voraussetzungen (i),(ii) und (iv) der Liste genügt, so kann man in $\underline{A}$ projektive und induktive Limites bilden. In der Tat: Zur Bildung des projektiven Limes der $(A_i)$ muß man die Produkttopologie der $A_i$ bilden können und bekommt ein Modell des projektiven Limes durch Heraussonderung eines geeigneten Teilraums des Produkts. Den induktiven Limes realisiert man als einen geeigneten Quotienten der direkten Summe der $A_i$. Alle hierbei auszuführenden Konstruktionen sind nach den Sätzen 1 und 2 möglich. Auf $\underline{A}$ können wir nun die Bildungen PROJEKTIV und INDUKTIV definieren. Sie ordnen einem Tripel $\mathcal{U}$ aus PROJEKTIV($\underline{A}$) (bzw. INDUKTIV($\underline{A}$) ) den projektiven (induktiven ) Limes zu.

4) VOLLSTÄNDIG($\underline{A}$) sei die Klasse aller $\mathcal{A}\in\varkappa(\underline{A})$, $\mathcal{A}=(X,\hat{X},j)$, so daß gilt:

i) $j:X\longrightarrow\hat{X}$ ist ein Isomorphismus auf $j(X)$.

ii) $j(X)$ ist dicht in $\hat{X}$ und $j(\{0\})=\overline{\{0\}}$ .

iii) $\hat{X}$ ist vollständig als topologische Gruppe.

Auf VOLLSTÄNDIG($\underline{A}$) ist VOLLSTÄNDIG($\mathfrak{A}$)=$\hat{X}$ eine Bildung.

Ist $\underline{B}$ eine weitere volle Unterkategorie von TVG und $\mathfrak{f}:\underline{A}\longrightarrow\underline{B}$ ein Funktor, so liefert $\mathfrak{f}$ eine Klassenabbildung $\mathfrak{f}^*:\varkappa(\underline{A})\longrightarrow\varkappa(\underline{B})$. Es ist $\mathfrak{f}^*(\mathcal{A})$ dasjenige Tripel, in dem die in $\mathcal{A}$ vorkommenden Objekte und Morphismen durch ihre $\mathfrak{f}$-Bilder ersetzt sind. Seien nun $\Phi,\Psi$ Bildungen in $\underline{A},\underline{B}$ und es gelte $\mathfrak{f}^*(\mathrm{Def}(\Phi))\subset\mathrm{Def}(\Psi)$. Wir sagen, daß $\mathfrak{f}$ treu ist bezüglich $\Phi$ und $\Psi$, wenn die folgende Kommutativitätsrelation erfüllt ist:

(1) $\qquad\mathfrak{f}(\Phi(\mathcal{A}))=\Psi(\mathfrak{f}^*(\mathcal{A}))\quad$ f.alle $\mathcal{A}\in\mathrm{Def}(\Phi)$

Beispiele:

5) Sei $J:\underline{LCR}\longrightarrow\underline{TLR}$ der Inklusionsfunktor. J ist treu bezüglich der Bildung von Initialtopologien aber nicht treu bezüglich der Bildung von Finaltopologien. (Vgl. Bourbaki [1], Chap.II, §4, ex.15).

6) Es sei $ASS:\underline{TLR}\longrightarrow\underline{LCR}$ der Funktor, der jeder TLR-Topologie die assoziierte lokalkonvexe Topologie zuordnet. ASS ist treu bezüglich der Bildung von Finaltopologien (vgl. [3], S.O.Iyahen Prop.2.1).

SATZ 4.- Sei $\mathfrak{f}:\underline{A}\longrightarrow\underline{B}$ ein treuer Funktor bezüglich den Bildungen $\Phi$ auf $\underline{A}$ und $\Psi$ auf $\underline{B}$. Die Eigenschaft E für Objekte aus $\underline{A}$ gelte genau dann, wenn E' für die $\mathfrak{f}$-Bilder in $\underline{B}$ gilt. Seien $\mathcal{A}\in\varkappa(\underline{A})$, $\mathcal{A}=((X_i),(Y_k),(f_{ki}))$ und $I'\subset I,K'\subset K$. Dann gilt: Es sind äquivalent

(a) $\qquad E((X_i)_{i\in I'},(Y_k)_{k\in K'})\Longrightarrow E(\Phi(\mathcal{A}))$

(b) $\quad E'((\mathfrak{f}(X_i))_{i\in I'},(\mathfrak{f}(Y_k))_{k\in K'})\Longrightarrow E'(\Psi(\mathfrak{f}^*(\mathcal{A})))$

B e w e i s: Nach Voraussetzung ist (a)äquivalent mit (c):

(c) $E'((\mathfrak{f}(X_i))_{i\in I'},(\mathfrak{f}(Y_k))_{k\in K'})\Longrightarrow E'(\mathfrak{f}(\Phi(\mathcal{A}))$, denn $E(X)\Longleftrightarrow E'(\mathfrak{f}(X))$ f.alle $X\in\underline{A}$. (c) ist äquivalent mit (b) nach Formel (1).

## §2. Innere topologische direkte Summen; uniforme Struktur; Vollständigkeit; Halbmetrisierbarkeit

### 1. Innere topologische direkte Summen.

Wir betrachten weiter eine volle Unterkategorie $\underline{A} \subset \underline{TVG}$. Es sei $\underline{A}$ eine E-Kategorie und E genüge den Voraussetzungen (i),(ii) und (iii) der Liste von §1. Wir können dann in $\underline{A}$ Teilräume, Produkte und Quotienten bilden, und diese Bildung kann stets bereits in der Kategorie $\underline{TOP}$ vorgenommen werden. Damit sind Sätze über topologische direkte Summen und Summanden in topologischen Gruppen insbesondere Sätze über Objekte der Kategorie $\underline{A}$. So ist die Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow X/L$ ein strikter Morphismus, und X/L ist genau dann separiert, wenn L abgeschlossen ist. Der Abschluß N der O in X ist ein linearer Teilraum von X. Damit ist X/N separiert. Wir nennen X/N den zu X assoziierten separierten Raum. Ist L ein algebraischer direkter Summand von N, so ist L bereits ein topologischer direkter Summand.

### 2. Uniforme Struktur und Vollständigkeit.

Die Objekte aus $\underline{TVG}$ tragen als topologische Abelsche Gruppen eine natürliche uniforme Struktur. Damit gelten alle Sätze über die Topologie der uniformen Struktur und über gleichgradig stetige Abbildungen, die man in der Kategorie $\underline{TOPAB}$ der topologischen Abelschen Gruppen formuliert, auch für Objekte aus $\underline{TVG}$. Ist X eine separierte t.V.G., so hat X eine Vervollständigung $\hat{X}$ in $\underline{TVG}$ (Bourbaki [1], Chap.I, §1, N°4). Damit ist für jede t.V.G. X eine Vervollständigung $\hat{X}$ wie folgt erhältlich: Mit einem topologischen direkten Summanden L von $N = \overline{\{O\}}$ sei $X = \hat{L} \times N$ und $j(l \oplus n) = (j_L(l), n)$, wobei $j_L: L \hookrightarrow \hat{L}$ die Einbettung ist. Man sieht leicht, daß X bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Es ist nicht richtig, daß für eine volle Unterkategorie $\underline{A} \subset \underline{TVG}$ mit $X \in \underline{A}$ auch $\hat{X} \in \underline{A}$ gilt. Es gilt aber:

SATZ 1.- Es sei $\underline{A}$ eine E-Kategorie. E genüge der folgenden Voraussetzung:
(v) E vererbt sich auf die Abschlüsse in topologischen Vektorgruppen.
Dann ist mit $X \in \underline{A}$ stets $\hat{X} \in \underline{A}$.

Der Beweis ist einfach. Wir wollen eine volle Unterkategorie A von TVG stabil nennen, wenn sie eine E-Kategorie ist, wobei E die Voraussetzungen (i)-(iv) der Liste im §1 und die Voraussetzung (v) in Satz 1 erfüllt. In A kann man Initialtopologien, Finaltopologien, induktive Limites, projektive Limites und Vervollständigungen bilden. Zum Beispiel sind TLR und LCR stabile Kategorien. Auch TVG selbst ist eine stabile Kategorie; dabei ist E die leere Eigenschaft.

3. Halbmetrisierbarkeit.

Eine t.V.G. ist genau dann halbmetrisierbar, wenn sie eine abzählbare NUB hat. Die Topologie kann dann durch eine translationsinvariante Metrik beschrieben werden. Teilräume, Quotientenräume und abzählbare Produkte von halbmetrisierbaren t.V.Gen sind halbmetrisierbar. Ist $X \subset TVG$ halbmetrisierbar und vollständig, so gilt dasselbe von jedem Quotienten.

# KAPITEL II: LOKALKREISFÖRMIGE VEKTORGRUPPEN

## §1. Die Kategorie LKVG

### 1. Lokalkreisförmige Vektorgruppen.

Unter einer lokalkreisförmigen Vektorgruppe verstehen wir eine t.V.G. mit einer NUB aus kreisförmigen Mengen. Diese Objekte bilden eine volle Unterkategorie LKVG⊂TVG. Lokalkreisförmige Vektorgruppe kürzen wir ab mit l.kf.V.G.

BEHAUPTUNG 1.- Es sei X eine t.V.G. Dann sind äquivalent:
(a) X ist eine l.kf.V.G.
(b) Die Abbildung $\mathbb{K}\times X \longrightarrow X$, $(\lambda,x)\longmapsto \lambda x$ ist stetig in $(o,O)$.

Offenbar ist (b) äquivalent mit (a).

Die folgende Behauptung beweist man wie in Bourbaki [1] , Chap.II, §2, Prop.14 (bzw. Chap.I, §2, Prop.2 ).

BEHAUPTUNG 2.- In einer t.V.G. ist der Abschluß einer konvexen (kreisförmigen) Menge konvex (kreisförmig).

Ist nun E die Eigenschaft kreisförmig, so ist LKVG eine stabile E-Kategorie. Offensichtlich genügt nämlich E den Voraussetzungen (i)-(iv) der Liste vom §1. Außerdem genügt E der Voraussetzung (v) vom Satz 1, §2, Kap.I. Ist A eine Teilmenge einer t.V.G., so ist die abgeschlossene Hülle $\overline{\Gamma(A)}$ der absolutkonvexen Hülle von A ebenfalls absolut konvex. Diese Menge nennen wir in Analogie zu der Situation in t.l.R. die abgeschlossene absolutkonvexe Hülle von A.

### 2. Beispiele von lokal kreisförmigen Vektorgruppen.

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis von Teilräumen des $\mathbb{K}$-linearen Raums X. Auf jedem $M\in\mathfrak{M}$ sei $u_M$ eine lineare Topologie, und für $M,L\in\mathfrak{M}$ mit $M\subset L$ sei $u_M \supset u_L|M$ (d.h. die Inklusion $j:(M,u_M)\hookrightarrow(L,u_L)$ ist stetig). Die Menge $\bigcup_{M\in\mathfrak{M}} \mathfrak{U}_o[u_M]$ ist die NUB einer l.kf. Topologie auf X, die wir mit $u_{\mathfrak{M}}$ bezeichnen.

Man kann $u_{\mathfrak{M}}$ auffassen als den projektiven Limes der l.kf. Vektorgruppentopologien $u_{\{(M,u_M)\}}$ auf X. Ist $u_M$ vollständig, so auch $u_{\{(M,u_M)\}}$. Der folgende Satz ist daher ein Spezialfall der wohlbekannten Aussage, dass der projektive Limes von vollständigen separierten Gruppen vollständig ist.

SATZ 1.- *Ist in* der eben geschilderten Situation jedes $(M,u_M)$ vollständig und separiert, so ist $u_{\mathfrak{M}}$ ebenfalls vollständig und separiert.

Für einen Teilraum Y von X gilt

$$(1) \qquad u_{\mathfrak{M}}|Y = v_{\mathfrak{M}_Y}$$

wobei $\mathfrak{M}_Y = \{(M\cap Y, u_M|M\cap Y); M\in\mathfrak{M}\}$.
Offensichtlich ist ein Teilraum von X genau dann offen, wenn er ein $M\in\mathfrak{M}$ enthält.

Besonders häufig wird uns folgende Situation begegnen

X ist ein t.l.R. mit Topologie u, und $\mathfrak{M}$ besteht aus Teilräumen von X (d.h. $u_M = u|M$). Wir werden in diesem Fall $u_{\mathfrak{M}}$ schreiben, ohne auf die Topologien $u_M$ der $M\in\mathfrak{M}$ hinzuweisen.
Ist insbesondere u die triviale Topologie auf X, dann bezeichnen wir $u_{\mathfrak{M}}$ als eine Lineartopologie. $(X,u_{\mathfrak{M}})$ *sei* dann ein lineartopologischer Raum ( Köthe [6] nennt einen Raum lineartopologisch, wenn er eine NUB aus linearen Teilräumen hat und separiert ist). Statt $u_{\mathfrak{M}}$ schreiben wir $[\mathfrak{M}]$ für die Topologie des lineartopologischen Raums $(X,u_{\mathfrak{M}})$ (d.h. $[\mathfrak{N}]=[\mathfrak{M}]$, wenn $u_{\mathfrak{N}} = u_{\mathfrak{M}}$ ).

## §2. Teilräume in LKVG.

### 1. Teilräume endlicher Dimension und abgeschlossene Hyperebenen.

BEHAUPTUNG 1.- Sei X eine separierte l.kf.V.G. Ist X eindimensional, so ist X diskret oder $X \cong \mathbb{K}$.

Denn jede kreisförmige NU ist entweder absorbant oder gleich $\{0\}$.

SATZ 1.- Eine Linearform f auf einer l.kf.V.G. X ist genau dann stetig, wenn N(f) abgeschlossen ist.

Die Bedingung ist offenbar notwendig. In der kanonischen Faktorisierung $X \longrightarrow X/N(f) \xrightarrow{g} \mathbb{K}$ von f ist nach Beh.1 g stetig und damit auch f. Folglich ist die Bedingung auch hinreichend.

BEHAUPTUNG 2.- X sei eine endlichdimensionale l.kf.V.G., in der jede Nullumgebung erzeugend ist. Dann ist X ein t.l.R.

Wir zeigen, daß jede Nullumgebung U absorbant ist. Sei V eine kreisförmige NU in X mit $\underbrace{V+\cdots\cdots+V}_{\dim X\text{-mal}} \subset U$. Nach Voraussetzung enthält V eine Basis B von X. Es gilt $\lambda b \in V$ für alle $b \in B$ und $|\lambda| \leq 1$. Daher ist $\{\sum_{b\in B} \lambda_b \cdot b; |\lambda_b| \leq 1 \text{ f.a. } b \in B\} \subset U$. Damit ist U absorbant.

SATZ 2.- Sei X eine endlichdimensionale l.kf.V.G. Dann existiert ein eindeutigbestimmter, offener und minimaler Teilraum M von X. M ist ein t.l.R.

Da X endlichdimensional ist, ist der Durchschnitt M aller offenen Teilräume von X offen und minimaloffen. Offenbar ist M eindeutig bestimmt. Ist U eine M-NU, so ist $[U]$ offen, also $[U] = M$. Damit ist M ein t.l.R. nach Beh.2.

FOLGERUNG 1.- Ein Teilraum von X ist genau dann offen, wenn er M enthält. Für jeden algebraisch direkten Summanden L von M ist L diskret und es gilt $X = M \oplus L$.

FOLGERUNG 2.- X ist lokalkompakt und vollständig.

FOLGERUNG 3.- Sei X eine separierte l.kf.V.G. Dann ist jeder endlichdimensionale Teilraum von X abgeschlossen.

FOLGERUNG 4.- X sei eine l.kf. V.G., M sei ein abgeschlossener, F ein endlichdimensionaler Teilraum von X. Dann ist M+F abgeschlossen.

Das beweist man wie in Bourbaki [1], Chap.I, §2, Cor.2 zu Th.2.

## 2. Lokalkompakte l.kf.V.Gn

SATZ 3.- X sei eine separierte l.kf.V.G. Ist V eine kreisförmige, präkompakte NU von X, so ist $M = [V]$ ein t.l.Teilraum von X. M ist der eindeutigbestimmte offene minimale Teilraum von X.

Es ist V+V präkompakt. Daher gibt es eine endliche Menge $A \subset V+V$ mit $V+V \subset A+V$. Sei $M = [A]$ und $q: X \longrightarrow X/M$ kanonisch. Die Menge $W = q(V)$ ist eine kreisförmige, präkompakte NU in der l.kf. Vektorgruppe $[V]/M$. Außerdem gilt $W+W \subset W$, woraus folgt, daß W ein linearer Teilraum

von X/M ist also W = $\{M\}$, da W präkompakt ist. Es folgt $[V] = M$. Offenbar ist M offen. Wir sind fertig, wenn wir zeigen, dass M ein t.l.R. ist, denn dann ist für jeden offenen Teilraum L von X $L \cap M$ offen, also $M \subset L$. Das folgt nun aus dem folgenden Lemma.

LEMMA.- Es sei X eine endlichdimensionale l.kf.V.G. und $P \subset X$ eine kreisförmige präkompakte Teilmenge mit $0 \in P$. Dann ist $[P]$ ein t.l.R.

Zum Beweis sei M ein offener Teilraum von $[P]$, und $q: X \longrightarrow X/M$ sei kanonisch. Dann ist q(P) kreisförmig präkompakt und erzeugend in $[P]/M$. Damit ist $q(P)=[P]/M$ also $[P]=M$. Das Lemma folgt aus Beh.2.

FOLGERUNG.- Die separierten lokalkompakten l.kf.V.Gn sind die Produkte aus endlichdimensionalen t.l.R. mit diskreten Vektorgruppen.

## 3. Kompakte konvexe Mengen in einer l.kf.V.G.

Die Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-linearen Raums X heißt sternförmig bezüglich $a \in A$, wenn für jedes $b \in A$ die Strecke mit dem Anfangspunkt a und dem Endpunkt b ganz in A liegt.

BEHAUPTUNG 3.- Es sei K eine bezüglich 0 sternförmige, präkompakte Teilmenge der l.kf. Vektorgruppe X. Dann ist $[K]$ ein t.l.R.

Zum Beweis der Beh.3 sei X zunächst ein reeller Raum. Mit K ist auch K-K präkompakt. Außerdem ist K-K kreisförmig. Es sei $K_n = \underbrace{K+\ldots+K}_{n \times mal} \underbrace{-K+\ldots+K}_{n \times mal}$. Dann gilt $[K] = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Sei U eine NU und V eine kreisförmige NU mit $V+V \subset U$. Ist $b \in [K]$, so existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b \in K_n$. Es gibt eine endliche Teilmenge $A \subset K_n$ mit $K_n \subset A+V$. Es ist nun $P = [A] \cap K_n$ kreisförmig, präkompakt und erzeugend in $[A]$. Aus dem Lemma in Abschnitt 2. folgt, dass $[A]$ ein t.l.R. ist. Folglich existiert ein $\lambda \in \langle 0,1 \rangle$ mit $\lambda A \subset V$ d.h. $\lambda b \in \lambda K_n \subset \lambda A + \lambda V \subset V+V \subset U$. Damit ist U absorbant auf $[K]$ und es folgt die Behauptung für den reellen Fall. Im komplexen Fall ergibt sich nach dem Vorhergehenden, dass die reell-lineare Hülle L von K ein t.l.R. ist und also auch die komplexe lineare Hülle L+iL von K.

# KAPITEL III: LOKALKONVEXE VEKTORGRUPPEN

## §1 Minkowskifunktionale, konvexe Mengen und inwendige Punkte

### 1. Minkowskifunktionale und konvexe Mengen.

Wir betrachten konvexe Teilmengen A eines $\mathbb{K}$-linearen Raums X. Ist $0 \in A$, so nennen wir die reelle Funktion $p_A : X \longrightarrow [0,\infty]$, $p_A(x) = \inf \{\beta > 0; x \in \beta A\}$ das Minkowskifunktional von A (auch das Eichfunktional von A). $p_A$ ist subadditiv und positiv homogen, d.h. es ist $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$ und $p_A(\lambda x) = \lambda p_A(x)$ f.a. $x, y \in X$ und $\lambda > 0$ (dabei $\lambda \cdot \infty = \infty$ für $\lambda \in \langle 0, \infty]$ und $\lambda + \infty = \infty + \lambda = \infty$ f.a. $\lambda \in [0,\infty]$). Umgekehrt nennen wir eine subadditive und positivhomogene Funktion $p : X \longrightarrow [0,\infty]$ ein Minkowskifunktional. Der Name ist dadurch gerechtfertigt, daß p das Minkowskifunktional der konvexen Menge $A = \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$ ist. Für ein Minkowskifunktional p bezeichnen wir mit $W(p,\beta)$ (bzw. $V(p,\beta)$ ) die Menge der $x \in X$ mit $p(x) < \beta$ (bzw. $p(x) \leq \beta$ ). Es gilt stets $W(p_A,1) \subset A \subset V(p_A,1)$ und p ist das Minkowskifunktional jeder konvexen Menge A mit $W(p,1) \subset A \subset V(p,1)$. Wir bezeichnen mit K(A) den von A erzeugten konvexen Kegel. Es gilt offenbar $K(A) = p_A^{-1}(\mathbb{R})$. Von besonderem Interesse sind diejenigen Eichfunktionale, für die K(A) ein linearer Teilraum ist. Solche Funktionale wollen wir pseudosublinear nennen. Eine Pseudonorm ( Pseudohalbnorm) sei dann ein pseudosublineares Funktional, so daß $p|p^{-1}(\mathbb{R})$ eine Norm (Halbnorm) ist.
Wir erinnern daran, daß ein Punkt $a \in A$ ein inwendiger Punkt von A heißt, wenn 0 ein algebraisch innerer Punkt von A-a in [A-a] ist. ( G. Köthe [6], Seite 180 ).

BEHAUPTUNG 1.- Die pseudosublinearen Funktionale sind genau die Eichfunktionale von konvexen Mengen mit dem inwendigen Punkt 0.

B e w e i s: Ist p ein pseudosublineares Funktional, so ist 0 ein algebraisch innerer Punkt von $A = W(p;1)$ in $K(A) = p^{-1}(\mathbb{R})$. Ist andererseits A eine konvexe Menge mit dem inwendigen Punkt 0, so ist $[A] = K(A)$ ein linearer Raum.

### 2. Konvexe Mengen in l.kf.V.Gn.

Es sei nun A eine konvexe NU in der l.kf. Vektorgruppe X.

BEHAUPTUNG 2.- Die Menge K(A) ist offen und abgeschlossen und $p_A | K(A) \longrightarrow [0,\infty\rangle$ ist stetig.

B e w e i s: Wegen $\overline{K(A)} \subset K(A) + A \subset K(A)$ ist K(A) offen und abgeschlossen. Ist $a \in K(A)$ und $\varepsilon > 0$, so gilt $|p(b) - p(a)| \leq \varepsilon$ f.a. $b \in a + \varepsilon(A \cap -A)$. Damit ist $p_A$ stetig auf K(A).

FOLGERUNG 1.- Es gilt stets $W(p_A,1) \subset \overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A} \subset V(p_A,1)$.

FOLGERUNG 2.- Es gilt $K(\overset{\circ}{A}) = K(A) = K(\overline{A})$.

BEHAUPTUNG 3.- Es sei B eine konvexe Teilmenge mit einem inneren Punkt b. Dann ist jeder Punkt der offenen Verbindungsstrecke von b mit einem Punkt $x \in \overline{B}$ ein innerer Punkt von B.

B e w e i s: Man kann b=0 annehmen. Für ein $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ ist dann $p_B(\lambda x) = \lambda p_B(x) < 1$, also $\lambda x \in W(p_B,1) \subset \overset{\circ}{B}$.

SATZ 1.- Es sei A eine konvexe Menge mit $A = W(p_A,1)$, d.h. A bestehe aus inwendigen Punkten. Dann ist $\overset{\circ}{A}$ konvex, und es gilt $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}$. Ist B eine konvexe Menge, so gilt stets, daß $\overset{\circ}{B}$ konvex ist.

B e w e i s: Der zweite Teil der Behauptung folgt unmittelbar aus Beh. 3. Sei nun $x \in \overset{\circ}{A}$, so existiert eine kreisförmige NU U, so daß $x+U \subset \overset{\circ}{A}$. Sei ferner $y \in (x+U) \cap A$. Es ist dann $y \in W(p_A,1) \subset \overset{\circ}{A}$. Außerdem gilt $y-x \in U$, also auch $x-y \in U$ und damit $x+x-y \in x+U \subset \overset{\circ}{A}$. Aus beh. 3 folgt nun $x = \frac{1}{2}(2x-y) + \frac{1}{2}y \in \overset{\circ}{A}$.

Beispiele:

1) Es sei X ein Banachraum, und $\mathbb{K}_d$ sei die diskrete Gerade. Ferner sei H eine dichte Hyperebene in $Y = X \oplus \mathbb{K}_d$ und A sei die konvexe Hülle von $H \oplus 1$ und $X \oplus o$. Man sieht leicht, daß $\overline{A}$ die konvexe Hülle von $X \oplus 1$ und $X \oplus o$ ist. Damit ist $\overline{A}$ offen. Sicher ist damit $\overset{\circ}{A} \neq \overset{\circ}{\overline{A}}$.

2) In der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$ sei A die offene Einheitskreisscheibe bezüglich des Punktes P = (o,1). Dann ist A eine konvexe Menge mit dem isolierten Punkt P. $\overset{\circ}{A}$ ist die offene Einheitskreisscheibe und $\overset{\circ}{\overline{A}}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe ohne die Punkte P und -P. Damit ist $\overset{\circ}{A} \neq \overline{A}$.

## §2. Lokalkonvexe Vektorgruppen.

### 1. Definition der lokalkonvexen Vektorgruppen.

Eine t.V.G. heißt lokalkonvex, wenn sie eine NUB aus absolutkonvexen Mengen besitzt. Die Kategorie der lokalkonvexen Vektorgruppen bezeichnen wir mit LCVG; lokalkonvexe Vektorgruppe kürzen wir ab durch l.k.V.G. Wenn eine l.k.V.G. eine Nullumgebungsbasis der Form $\frac{1}{n}K$ für $n \in \mathbb{N}$ hat, wobei K eine absolutkonvexe Menge ist, so nennen wir sie, in Analogie zu den lokalkonvexen Räumen mit einer solchen NUB, halbnormiert. Wenn eine solche Vektorgruppe auch noch separiert ist, so heißt sie eine normierte Vektorgruppe. Eine vollständige normierte (metrisierbare l.k.)V.G. nennen wir eine Banachgruppe (Fréchetgruppe). Für jede absolutkonvexe NU V einer l.k.V.G. X ist $p_V$ stetig. Für eine Menge $\mathfrak{S}$ aus absolutkonvexen Mengen eines $\mathbb{K}$-linearen Raums X bilden die Mengen $\frac{1}{n}S$ für $S \in \mathfrak{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Subbasis eines Nullumgebungfilters einer LCVG-Topologie auf X. Man hat auf diese Weise die Möglichkeit, l.k.V.Gn durch Familien von Pseudohalbnormen zu erzeugen. Umgekehrt wird jede l.k.V.G. durch die Familie aller stetigen Pseudohalbnormen erzeugt. Die Topologie einer (halb-)normierten Vektorgruppe wird durch eine einzige Pseudonorm (Pseudohalbnorm) erzeugt.

### 2. Eine Charakterisierung der Kategorie LCVG.

Die Kategorie LCVG ist eine E-Kategorie, wobei E die Eigenschaft absolutkonvex ist. Als eine solche Kategorie ist LCVG eine stabile Unterkategorie von TVG. Spezielle Beispiele l.k.V.G. bilden die t.V.G. der Form $(X,u_{\mathfrak{M}})$ aus dem Abschnitt 2 in §1, Kap.II, wenn dort die Topologien $u_M$ lokalkonvexe Vektorraum-Topologien sind. Den Beweis des folgenden Satzes wollen wir in Kap.IV, §1 (am Ende des Paragraphen) nachtragen.

SATZ 1.- Es sei (X,u) eine l.k.V.G. Dann existiert eine lokalkonvexe Topologie v auf X, so daß gilt $u = v_{\mathfrak{M}}$, wobei $\mathfrak{M}$ die Menge aller u-offenen Teilräume ist.

Man kann also u auffassen als obere Grenze einer l.k. Topologie v und einer Lineartopologie $[\mathfrak{M}]$. Dabei ist $[\mathfrak{M}]$ die feinste Lineartopologie, die gröber ist als u und v ist die feinste l.k. Topologie, die gröber ist als u (hierzu vgl. den Beweis von Satz 1).

## 3. Finaltopologien in LCVG.

SATZ 2.- Es sei $((X_\alpha)_{\alpha\in A}, X, (f_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein Finalsystem in LCVG. Dann gelten :

1) Die Menge der absolutkonvexen Mengen V von X mit $\overleftarrow{f_\alpha}(V)\in \mathfrak{U}_0[X_\alpha]$ ist NUB der Finaltopologie u des obigen Systems in LCVG.
2) Eine lineare Abbildung $f:X\to Y$ in eine l.k.V.G. ist genau dann stetig, wenn $f\circ f_\alpha$ stetig ist für jedes $\alpha\in A$.
3) Die Mengen $\Gamma((f_\alpha(V_\alpha))_{\alpha\in A})$ bilden eine NUB von u, wenn $V_\alpha$ eine NUB von $X_\alpha$ durchläuft.

Man beweist dies ganz leicht. Man überlegt sich ebenfalls leicht, daß bezüglich der Bildung von Finaltopologien die üblichen Transitivitätsregeln gelten.

# §3. Der Satz von Hahn-Banach für l.k. Vektorgruppen

## 1. Fortsetzung stetiger Linearformen.

SATZ 1.- Es sei X ein $\mathbb{K}$-linearer Raum und p ein pseudosublineares Funktional auf X. Sei f eine Linearform auf einem linearen Teilraum Y von X mit $\operatorname{Re} f\leqslant p|Y$. Dann existiert eine lineare Fortsetzung h von f auf X mit $\operatorname{Re} h\leqslant p$.

B e w e i s: Man wende den Satz von Hahn-Banach auf den linearen Raum $L=\overleftarrow{p}(\mathbb{R})$, den linearen Teilraum $Y\cap L$ von L und auf die Linearform $f|L\cap Y\leqslant p|L\cap Y$ an. Er ergibt eine lineare Fortsetzung $h_L$ von $f|L\cap Y$ auf L mit $h_L\leqslant p|L$. Nun setze man $h_L$ auf X linear fort zu h so, daß h und f auf Y übereinstimmen.

Bemerkung: Setzt man in Satz 1 von p voraus, daß es ein Minkowski-Funktional statt eines pseudosublinearen Funktionals ist, so wird die Aussage des Satzes falsch. Beispiel: In der Ebene $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei Y die Gerade $\mathbb{R}\times\{0\}$ und p ein Minkowskifunktional, definiert durch

$p((x,o)) = x$ für $x \geq o$, $p((x,y)) = o$ für $x < o$ und $y = o$, $p((x,y)) = o$ für $y > o$ und $p((x,y)) = \infty$ sonst. p ist das Stützfunktional von $A = V(p,1) = \mathbb{R}x\langle o,\infty\rangle \cup \langle -\infty,1]x\{o\}$. Wir betrachten die Linearform f auf Y, $f((x,o)) = x$. Offenbar ist $f \leq p|Y$. Ist h eine lineare Fortsetzung von f auf X, so gilt $h((x,y)) = x + h((o,1))\cdot y$. Ist $y > o$, so existiert daher stets ein $x \in \mathbb{R}$, so daß $h((x,y)) > o = p((x,y))$.

FOLGERUNG 1.- Sei p eine Pseudohalbnorm auf dem $\mathbb{K}$-linearen Raum X. Für $a \in X$ sei $p(a) < \infty$. Dann existiert eine Linearform f auf X mit $f(a) = p(a)$ und $\mathrm{Re}\, f \leq p$.

FOLGERUNG 2.- Es sei X eine t.V.G. und Y ein Teilraum von X. Es sei f eine stetige Linearform auf Y und p eine stetige Pseudohalbnorm auf X mit $|f| \leq p|Y$. Dann existiert eine stetige lineare Fortsetzung h von f auf X mit $|h| \leq p$.

FOLGERUNG 3.- Sei X eine l.k.V.G. und Y ein Teilraum von X. Dann läßt sich jedes $f \in Y'$ stetig und linear auf X fortsetzen.

## 2. Geometrische Form des Satzes von Hahn-Banach.

SATZ 2.- Es sei X eine l.k.V.G. und sei A eine konvexe, offene, nichtleere Teilmenge von X, die aus inwendigen Punkten besteht. M sei eine nichtleere affine Mannigfaltigkeit mit $M \cap A = \emptyset$. Dann gibt es eine abgeschlossene affine Hyperebene H in X mit $M \subset H$ und $H \cap A = \emptyset$.

Das beweist man wie das Theorem 1 in §5, Chap.II von Bourbaki [1] und Prop.1, §8, Chap.II in [1].

BEHAUPTUNG 1.- Es seien A und B konvexe und nichtleere Teilmengen von X, die beide aus inwendigen Punkten bestehen. A sei offen. Es gelte $A \cap B = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige Linearform f auf X mit $\mathrm{Re}\, f(a) < \mathrm{Re}\, f(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.

Die Menge A-B ist offen, konvex und nicht leer, und sie besteht aus inwendigen Punkten. Nach Satz 2 gibt es also eine abgeschlossene reelle Hyperebene H durch O, so daß $(A-B) \cap H = \emptyset$. Sei f eine komplexe Linearform, deren Realteil H beschreibt, d.h. $\mathrm{Re}\, f(x) = o$ für alle $x \in H$. Man kann o.E. $\mathrm{Re}\, f(A-B) < o$ annehmen. Es folgt die Beh.

SATZ NR. 2.- Es seien A und B konvexe nichtleere Teilmengen von X mit $A \cap B = \emptyset$. A sei abgeschlossen, algebraisch abgeschlossen und besitze einen inwendigen Punkt. B sei kompakt. Dann gibt es eine abgeschlossene affine reelle Hyperebene H, die A und B strikt trennt.

B e w e i s: Sei o.E. 0 ein inwendiger Punkt von A. Wir zeigen zunächst, daß ein $\lambda > 1$ existiert mit $B \cap \lambda A = \emptyset$. Im anderen Fall wäre $\bigcap_{\mu>1} \mu A \cap B \neq \emptyset$, da B kompakt ist. Weil A algebraisch abgeschlossen ist würde hieraus $A \cap B \neq \emptyset$ folgen. Es gibt nun eine absolutkonvexe Nullumgebung U aus inwendigen Punkten, so daß $\lambda A \cap (B+U) = \emptyset$. Die Menge $A' = W(p_A, 1) = \bigcup_{0<\mu<1} \mu A$ besteht ebenfalls aus inwendigen Punkten. Wir zeigen nun weiter, daß auch B+U aus inwendigen Punkten besteht: Ist $b \in B$, so ist nach Beh.3, §2 in Kap.II $[B-b]$ ein t.l.R. In Folge dessen ist $U \cap [B-b]$ eine NU für die feinste lokalkonvexe Topologie auf $[B-b]$. Damit bestehen B-b+U und somit auch B+U aus inwendigen Punkten. Ausserdem ist B+U offen, denn eine NU aus inwendigen Punkten ist offen (wegen $U = W(p_U, 1)$). Wir wenden nun Beh.1 auf $(1+\lambda)A'$ und auf B+U an. Es existiert eine stetige Linearform f auf X mit $\operatorname{Re} f((1+\frac{\lambda-1}{2})a) < \operatorname{Re} f(b)$ für alle $a \in A$ und $b \in B$. Ist nun $\sup \operatorname{Re} f(A) = o$, so folgt $\sup \operatorname{Re} f(A) < \inf \operatorname{Re} f(B)$ wegen der Kompaktheit von B. Ist $\sup \operatorname{Re} f(A) > o$, so folgt die letzte Relation aus der obigen Formel. Ist $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\sup \operatorname{Re} f(A) < \gamma < \inf \operatorname{Re} f(B)$ und $H = \overline{\operatorname{Re} f}^{-1}(\{\gamma\})$, so werden A und B strikt durch H getrennt.

FOLGERUNG 1.-Sei $A \subset X$ absolutkonvex. Dann ist der algebraische Abschluß $\tilde{A}$ von $\bar{A}$ gleich $\bar{A}^{\sigma(X,X')}$.

Dies folgt aus Beh.2, da $\tilde{A} = \bigcap_{\lambda>1} \bar{A}$ abgeschlossen ist.

FOLGERUNG 2.- Ist X separiert, so ist $\langle X, X' \rangle$ trennend.

KAPITEL IV: TONNELIERTHEIT IN LOKALKONVEXEN VEKTORGRUPPEN

## §1. Der Funktor loc

### 1. Definition von loc.

Es sei (X,u) eine l.k.V.G. Die Menge $\mathfrak{V}$ der absolutkonvexen und absorbanten u-Nullumgebungen ist die Basis des Nullumgebungsfilters einer l.k. Topologie loc(u). Wir nennen loc(u) die zu u assoziierte lokalkonvexe Topologie. Offenbar ist

(1) $\qquad u \supset \mathrm{loc}(u).$

BEHAUPTUNG 1.- loc(u) ist die feinste l.k. Topologie auf X, die gröber ist als u.

Denn jede l.k. Topologie auf X, die gröber ist als u, besitzt eine NUB aus absolutkonvexen absorbanten u-Nullumgebungen.

BEHAUPTUNG 2.- loc(u) ist die lokalkonvexe Vektorgruppen-Finaltopologie von u und der feinsten l.k. Topologie $\tau(X,X^*)$.

Diese Finaltopologie ist nach Beh. 1 gröber als u. Andererseits ist $u \supset \mathrm{loc}(u)$ und $\tau(X,X^*) \supset \mathrm{loc}(u)$.

BEHAUPTUNG 3.- Eine lineare Abbildung $f:X \longrightarrow Y$ in einen l.k. Raum ist genau dann u-stetig, wenn sie loc(u)-stetig ist.

Das folgt unmittelbar aus Beh.2 und (1).

FOLGERUNG 1.- Es ist $(X,u)' = (X,\mathrm{loc}(u))'$.

FOLGERUNG 2.- Die Zuordnung $(X,u) \longmapsto (X,\mathrm{loc}(u))$ ist ein Funktor von LCVG in LCR.

### 2. loc ist treu bezüglich der Bildung von Final- und Initialtopologien.

Wir knüpfen jetzt wieder an an die Bezeichnungen in §1, Kap.I.

SATZ 1.- Es sei $\mathfrak{A} = ((X_i,u_i),(X,u),(f_i))$ ein Element in FINAL(LCVG). Dann ist $\mathrm{loc}^*(\mathfrak{A})$ aus FINAL(LCR).

B e w e i s: Zum Beweis sei $w_i$ die feinste l.k. Topologie auf $X_i$. Dann ist die feinste l.k. Topologie w auf X die LCVG-Finaltopologie der $(w_i)$ und von w (vermöge der Abbildungen $(f_i)$ und $id_X$). Darum ist loc(u) die LCVG-Finaltopologie der $(w_i)$, der $(u_i)$ und von w. Das ist die LCVG-Finaltopologie der $loc(u_i)$ und, wie man leicht sieht, auch deren LCR-Finaltopologie.

BEHAUPTUNG 4.- Es sei $(X,u) = \prod_{\iota\in I}(X_i,u_i)$. Dann gilt $loc(u) = \prod_{\iota\in I} loc(u_i)$.

B e w e i s: Aus Beh.1 folgt $loc(u) \supset \prod_{\iota\in I} loc(u_i)$. Ist U eine absolutkonvexe loc(u)-NU, so existiert eine endliche Teilmenge K, so daß $\prod_{\iota\notin K} X_i \subset U$. Die Menge $V = U \cap \prod_{\varkappa\in K} X_k$ ist nun eine absolutkonvexe absorbante $\prod_{\varkappa\in K} u_k$-NU, und damit ist sie nach Satz 1 eine NU für $loc\left(\prod_{\varkappa\in K} u_k\right) = \prod_{\varkappa\in K} loc(u_k)$. Folglich ist U auch eine $\prod_{\iota\in I} loc(u_i)$-NU.

BEHAUPTUNG 5.- (X,u) trage die Urbildtopologie der l.k.V.G. (Y,u) vermöge $f:X\longrightarrow Y$. Dann ist loc(u) die Urbildtopologie von loc(v).

B e w e i s: Sei w die Finaltopologie von loc(v). Nach Beh.1 ist $w \subset loc(u)$. Ist U eine absolutkonvexe NU für loc(u), so existiert eine absolutkonvexe v-NU V mit $f^{-1}(V) \subset U$. Sei L ein algebraischer direkter Summand von f(X) und W = V+f(U)+L. W ist eine loc(v)-NU und es ist $f^{-1}(W) = f^{-1}(V)+U \subset 2U$.

SATZ 2.- Sei $\mathcal{A} = ((X,u),(X_i,u_i),(f_i)) \in INIT(\underline{LCVG})$. Dann ist $loc^*(\mathcal{A}) \in INIT(\underline{LCR})$.

Das folgt unmittelbar aus den Beh.4 und 5, da u die Urbildtopologie von $\prod_{\iota\in I} u_i$ vermöge $f = \prod_{\iota\in I} f_i$ ist.

Ist insbesondere L ein Teilraum der l.k.V.G. (X,u), so gelten:

(2) $\qquad loc(u|L) = loc(u)|L$

(3) $\qquad loc(u/L) = loc(u)/L$

Als Folgerung aus den Sätzen 1 und 2 ergibt sich nun die in der Überschrift behauptete Eigenschaft von loc:

SATZ 3.- Der Funktor loc ist treu bezüglich der Bildung von Final- und Initialtopologien.

3. Einige weitere Zusammenhänge zwischen (X,u) und (X,loc(u)).

BEHAUPTUNG 6.- Sei X die topologische direkte Summe aus N und dem u-offenen Teilraum M. Dann ist loc(u)|N die feinste l.k. Topologie und es gilt $(X,\mathrm{loc}(u)) = (M,\mathrm{loc}(u)|M) \overset{t}{\oplus} (N,\mathrm{loc}(u)|N)$.

B e w e i s: Aus (2) folgt, daß $\mathrm{loc}(u)|N = \mathrm{loc}(u|N)$ die feinste l.k. Topologie ist, denn u|N ist diskret. Ferner ist $X/N \cong M$, und somit: $\mathrm{loc}(u)/N \overset{(3)}{=} \mathrm{loc}(u/N) \cong \mathrm{loc}(u|M) \overset{(2)}{=} \mathrm{loc}(u)|M$.

Wir sind jetzt in der Lage, den Beweis von Satz 1 in §2. Kap.III nachzuholen. Wir zeigen, daß v = loc(u) die Behauptungen des Satzes erfüllt. Es gilt einerseits $u \supset \mathrm{loc}(u)_{\mathfrak{M}}$ (nach (1)). Ist U eine absolutkonvexe u-NU und L ein algebraisch direkter Summand von [U], so ist U+L eine loc(u)-NU. Da $[U] \in \mathfrak{M}$ gilt nun $(U+L) \cap [U] = U \in \mathcal{U}_o[\mathrm{loc}(u)_{\mathfrak{M}}]$.

## §2. Tonnelierte lokalkonvexe Vektorgruppen

1. Definition und einfache Eigenschaften der tonnelierten l.k. Vektorgruppen.

Eine absolutkonvexe abgeschlossene Teilmenge $T \neq \emptyset$ der l.kf. Vektorgruppe X nennen wir Tonne, wenn ihre lineare Hülle $[T] = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT$ offen ist. Für t.l.Räume fällt diese Definition mit der üblichen Definition von Tonnen zusammen. Jede l.k. Vektorgruppe hat eine NUB aus Tonnen. Eine l.kf. Vektorgruppe nennen wir tonneliert, wenn jede Tonne eine NU ist, und wenn sie l.k. ist. Wie im Fall der l.k. Räume sieht man, daß jede Baire'sche l.k. Vektorgruppe tonneliert ist. Insbesondere sind Fréchet- und Banachgruppen tonneliert.

Beispiel: Sei (X,u) ein Fréchetraum und $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Filterbasis aus abgeschlossenen Teilräumen von X. Nach Satz 1 in §1, Kap.II ist dann $u_{\mathfrak{M}}$ vollständig. Außerdem ist $u_{\mathfrak{M}}$ metrisierbar, da $\mathfrak{M}$ abzählbar ist. Damit ist $u_{\mathfrak{M}}$ eine Fréchetgruppe also tonneliert.

SATZ 1.- Die l.k.Vektorgruppe (X,u) ist genau dann tonneliert, wenn (X,loc(u)) tonneliert ist.

B e w e i s: Jede loc(u)-Tonne ist eine absorbante u-Tonne. Mit u ist damit auch loc(u) tonneliert. Sei andererseits T eine u-Tonne und loc(u) sei tonneliert. Für einen algebraischen direkten Summanden L von M = $[T]$ ist dann loc(u)/L = loc(u/L) tonneliert. Wegen Beh.6 in §1 ist dann auch loc(u)|M = loc(u|M) tonneliert. Damit ist aber die loc(u) M-Tonne $\overline{T}^{\sigma(M,M')} = \widetilde{T}$ eine u|M-und daher auch eine u-NU (vgl. Folgerung 1, Beh.2, §3, Kap.III). Wegen $\widetilde{T} \subset 2T$ ist auch T eine u-NU.

2. Permanenzeigenschaften tonnelierter Vektorgruppen.

BEHAUPTUNG 2.- Eine l.k.Vektorgruppe ist genau dann tonneliert, wenn einer ihrer offenen Teilräume tonneliert ist. In diesem Fall ist jeder offene Teilraum tonneliert.

Das ist leicht zu sehen.

SATZ 2.- Die Tonneliertheit von l.k. Vektorgruppen vererbt sich auf Produkte, Finaltopologien und abzählbarkodimensionale Teilräume.

B e w e i s: Es sei E die Eigenschaft tonneliert in LCVG und E' die Eigenschaft tonneliert in LCR. Wir wenden Satz 4 in §1, Kap.IV an mit $\mathfrak{f}$ = loc. Die Voraussetzungen dieses Satzes sind erfüllt (Satz 3, §1 und Satz 1).Die entsprechenden Permanenzeigenschaften sind in LCR wohlbekannt (Für abzählbarkodimensionale Teilräume beziehen wir uns auf M. Valdivia [12]).

Nach demselben Schema folgt weiter:

BEHAUPTUNG 3.- Sei X eine l.k. Vektorgruppe und $Y \subset X$ ein dichter tonnelierter Teilraum. Dann ist X tonneliert.

3. Der Satz von Banach-Steinhaus für tonnelierte Vektorgruppen.

SATZ 3.- Es seien X und Y l.k. Vektorgruppen und H eine Menge von stetigen linearen Abbildungen von X in Y. Sei X tonneliert. Für jede absolutkonvexe Nullumgebung V in Y existiere ein offener Teilraum M von X, so daß $f(M) \subset [V]$ für alle $f \in H$, und so daß die Menge $H|M \longrightarrow ([V], p_V)$ punktweise beschränkt ist. Dann ist H gleichgradig stetig.

B e w e i s: Die Bedingung über V impliziert, daß $\bigcap_{f \in H} f^{-1}(V)$ eine Tonne also eine NU ist.

## §3. Tonneliertheit, Graphensätze und Open-Mapping Theorems

1. Hypervollständige l.kf. Vektorgruppen.

Es sei (X,u) eine separierte l.kf. Vektorgruppe. Auf der Menge $\mathcal{K}(X)$ der kreisförmigen Teilmengen von X bilden die Mengen $\mathcal{U}_V = \{(A,B) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X);\ A \subset B+V, B \subset A+V\}$ eine Nachbarschaftsbasis für eine uniforme Struktur, wenn V die Menge $\mathcal{U}_o[u]$ durchläuft. X heißt hypervollständig, wenn diese uniforme Struktur vollständig ist. Mit wohlbekannten Schlüssen zeigt man, daß jede metrisierbare l.kf. Vektorgruppe hypervollständig ist, wenn sie vollständig ist. Im folgenden betrachten wir Filterbasen $\mathfrak{F}$ auf X, die Nullumgebungsbasen von l.kf. Vektorgruppentopologien $v_{\mathfrak{F}}$ sind. Wir werden nun Eigenschaften von $v_{\mathfrak{F}}$ in Eigenschaften des $\mathcal{K}(X)$-Netzes $\mathfrak{F}$ übersetzen.

BEHAUPTUNG 1.- $\mathfrak{F}$ ist genau dann ein $\mathcal{K}(X)$-Cauchynetz, wenn die Abbildung $(X,u) \xrightarrow{id} (X, v_{\mathfrak{F}})$ fastoffen ist.

B e w e i s: Denn $\mathfrak{F}$ ist genau dann ein Cauchnetz für $\mathcal{K}(X)$, wenn zu jeder u-NU V ein $F_V \in \mathfrak{F}$ existiert mit $F \subset F'+V$ für alle $F, F' \subset F_V$. Damit ist $F_V \subset \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} (V+F) = \overline{V}^{v_{\mathfrak{F}}}$. Ist umgekehrt $\overline{V}^{v_{\mathfrak{F}}} \in \mathcal{U}_o[v_{\mathfrak{F}}]$, so existiert $F_V \in \mathfrak{F}$ mit $F_V \subset F+V$ für alle $F \in \mathfrak{F}$ und insbesondere $F \subset F'+V$ für alle $F, F' \subset F_V$.

Ist das Netz $\mathfrak{f}$ konvergent, so konvergiert es gegen jede kreisförmige Menge $B \subset X$ mit $\overline{B} = \bigcap_{F \in \mathfrak{f}} \overline{F}$. Es gilt daher:

BEHAUPTUNG 2.- Die Abbildung $(X,u) \xrightarrow{id} (X,v_{\mathfrak{f}})$ sei graphenabgeschlossen. Dann ist sie genau dann offen, wenn $\mathfrak{f}$ konvergiert.

Diese Abbildung ist genau dann graphenabgeschlossen, wenn gilt $\bigcap_{F \in \mathfrak{f}, V \in \mathfrak{U}_0[u]} (F+V) = \bigcap_{F \in \mathfrak{f}} \overline{F} = \{0\}$. Daher konvergiert $\mathfrak{f}$ genau dann, wenn es gegen $\{0\}$ konvergiert, d.h. genau dann, wenn zu jeder u-NU V ein $F_V \in \mathfrak{f}$ existiert mit $F \subset V$ für alle $F \subset F_V$. Das bedeutet genau $v_{\mathfrak{f}} \supset u$.

Aus Beh.1 und 2 folgt nun:

SATZ 1.- Es seien $(X,u)$ und $(Y,v)$ l.kf. Vektorgruppen. X sei hypervollständig. Sei ferner $f: X \xrightarrow{\text{auf}} Y$ eine lineare und graphenabgeschlossene fastoffene Abbildung. Dann ist f offen.

Da $N(f) \times \{0\} = \text{Graph}(f) \cap (X \times \{0\})$ ist $N(f)$ abgeschlossen. Also ist die Bildtopologie w von u bei f separiert. Außerdem ist w hypervollständig (vgl. J.L. Kelley [4], S.238 C.1). Weiter ist die $id: (Y,w) \longrightarrow (Y,v)$ fastoffen und graphenabgeschlossen. Nach Beh. 1 ist nun jede NUB $\mathfrak{f}$ von $(Y,w)$ aus kreisförmigen Mengen ein $\chi(Y)$-Cauchynetz also konvergent. Aus Beh.2 folgt nun die Aussage des Satzes.

## 2. B- und $B_r$-vollständige l.kf. Vektorgruppen.

Eine separierte l.kf. Vektorgruppe X nennen wir B-vollständig ($B_r$-vollständig), wenn eine graphenabgeschlossene fastoffene lineare (injektive) Abbildung $f: X \xrightarrow{\text{auf}} Y$ in eine l.kf. Vektorgruppe Y offen ist. Jede B-vollständige Vektorgruppe ist $B_r$-vollständig. Nach dem vorhergehenden Abschnitt ist auch jede hypervollständige Vektorgruppe B-vollständig.

SATZ 2.- Sei $(X,u)$ eine B-vollständige ($B_r$-vollständige) l.kf. Vektorgruppe. Dann ist X vollständig.

Sei X eine nicht vollständige l.kf. Vektorgruppe und $a \in \hat{X} \setminus X$. Dann ist die kanonische Abbildung $q: X+\mathbb{K}a \xrightarrow{\text{auf}} X+\mathbb{K}a/\mathbb{K}a$ stetig und offen.

Daher ist $f = q|X$ stetig und bijektiv und darüber hinaus auch fastoffen, denn für jede X-NU U ist $\overline{f(U)} = \overline{q(U)} \supset q(\overline{U}^{X+Ka})$ und $\overline{U}^{X+Ka}$ ist eine NU. Aber f ist nicht offen. Andernfalls ist $f^{-1} \circ q$ ein stetiger Projektor auf X.

SATZ 3.- Eine l.kf. Vektorgruppe (X,u) ist schon dann B-vollständig ($B_r$-vollständig), wenn jede stetige und fastoffene (injektive) Abbildung von X auf eine l.kf. Vektorgruppe Y offen ist.

B e w e i s: Sei $f:(X,u) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y,v)$ linear, graphenabgeschlossen und fastoffen. (Y,w) sei die l.kf. Vektorgruppe mit der NUB aus den v-Abschlüssen der f-Bilder von u-Nullumgebungen. Dann ist w gröber als v. Folglich ist $f:(X,u) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y,w)$ stetig und fastoffen. Nach Voraussetzung ist f also offen. Erst recht ist $f:(X,u) \rightarrow\!\!\!\!\rightarrow (Y,v)$ offen.

Mit D. A. Rajkov [11] ist somit eine separierte l.k. Vektorgruppe X schon dann B-vollständig, wenn eine stetige fastoffene lineare Abbildung $f:X \longrightarrow Y$ in eine separierte l.k. Vektorgruppe Y offen ist.

## 3. Quasioffene und quasistetige Abbildungen.

Seien X, Y l.k. Vektorgruppe und $f:X \longrightarrow Y$ sei linear. Wir sagen f ist quasioffen (quasistetig), wenn die Bilder (Urbilder) von offenen Teilräumen offen sind. Sind X,Y t.l.Räume, so ist f immer quasistetig und quasioffen genau dann, wenn f surjektiv ist.

BEHAUPTUNG 3.- 1) Ist X tonneliert und f quasistetig, dann ist f faststetig.
2) Ist Y tonneliert und f quasioffen, dann ist f fastoffen.

Wir zeigen etwa 2). Hierzu sei U eine absolutkonvexe X-Nullumgebung. Dann ist $[f(U)] = \bigcup_{n \in N} n \cdot f(U) = f(\bigcup_{n \in N} nU) = f([U])$ offen. Daher ist $\overline{f(U)}$ eine Tonne also eine NU.

SATZ 4.- 1) Sei X B-vollständig , Y tonneliert, und f sei graphenabgeschlossen und quasioffen. Dann ist f offen.
2) Sei X tonneliert und Y $B_r$-vollständig. f sei graphenabgeschlossen, quasistetig und surjektiv. Dann ist f stetig.

B e w e i s: 1) ist eine unmittelbare Folgerung von Beh.3. 2) folgt durch Betrachtung der inversen Abbildung h von der Faktorisierung $g:X/N(f) \longrightarrow Y$ von f.

FOLGERUNG.- Seien X und Y Fréchetgruppen und $f:X \longrightarrow Y$ eine graphenabgeschlossene, quasistetige und quasioffene Abbildung. Dann ist f ein topologischer Isomorphismus.

# KAPITEL V: ÜBER DIE LOKALKONVEXE VEKTORGRUPPE $(X,u_{\mathfrak{M}})$

## §1. Die l.k. Vektorgruppe $(X,u_{\mathfrak{M}})$

Wir knüpfen an das Beispiel in Abschnitt 2, §1, Kap.II. In dem folgenden Paragraphen ist $(X,u)$ stets ein l.k. Raum, und $\mathfrak{M}$ ist eine Filterbasis aus u-abgeschlossenen Teilräumen.

### 1. Abschlüsse in $(X,u_{\mathfrak{M}})$.

BEHAUPTUNG 1.- Sei $T \subset X$ absolutkonvex. Dann gilt:

$$(1) \qquad \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \Gamma(T \cup \overline{T\cap M}^{u}) \subset \overline{T}^{u_{\mathfrak{M}}} \subset \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} (T + 2\overline{T\cap M}^{u})$$

B e w e i s: Wir zeigen zunächst (1) für den Fall, daß $\mathfrak{M} = \{M\}$ einelementig ist. Die Behauptung folgt dann für den allgemeinen Fall aus der Formel $\overline{T}^{u_{\mathfrak{M}}} = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} \overline{T}^{u_{\{M\}}}$. Wegen $u|M = u_{\{M\}}|M$ gilt $\overline{T\cap M}^{u} = \overline{T}^{u_{\{M\}}}\cap M$, und weil $\overline{T}^{u_{\{M\}}}$ absolutkonvex ist folgt $\overline{T}^{u_{\{M\}}} \supset \Gamma(T\cup\overline{T\cap M}^{u})$. Sei andererseits $x \in \overline{T}^{u_{\{M\}}}$ und $y \in (x+M)\cap T$. Für jede u|M-Nullumgebung U ist dann $x+U \subset y+M$, d.h. $(x+U)\cap(y+M)\cap T \neq \emptyset$. Es folgt $x \in \overline{(y+M)\cap T}^{u_{\{M\}}} \subset \overline{y + 2M\cap T} = y + 2\overline{M\cap T}$.

FOLGERUNG.- Für einen Teilraum L von X gilt

$$(2) \qquad \overline{L}^{u_{\mathfrak{M}}} = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} (L + \overline{L\cap M}^{u}).$$

### 2. Vollständige Hülle von $(X,u_{\mathfrak{M}})$.

BEHAUPTUNG 2.- Es gilt $\overline{\{0\}}^{u_{\mathfrak{M}}} = \overline{\{0\}}^{u}$, und ist $q: X \to X/\overline{\{0\}}$ die kanonische Abbildung, so gilt $u_{\mathfrak{M}}/\overline{\{0\}}^{u_{\mathfrak{M}}} = u/\overline{\{0\}})_{q(\mathfrak{M})}$.

Das ist leicht zu sehen.

SATZ 1.- Sei $(\hat{X},\hat{u})$ die vollständige Hülle von $(X,u)$. Wir bezeichnen $Y = \bigcap_{M\in\mathfrak{M}} (X+\overline{M}^{\hat{u}})$, $M_Y = \bigcap_{N\in\mathfrak{M}} (M+\overline{N}^{\hat{u}})$ und $\widetilde{\mathfrak{M}} = \{\overline{M}^{\hat{u}};\ M\in\mathfrak{M}\}$. Dann gelten:

a) Jedes $M_Y$ ist $\hat{u}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}$-abgeschlossen und es ist $M_Y = Y\cap\overline{M}^{\hat{u}}$.

b) M ist $\hat{u}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}$-dicht in $M_Y$, daher $\overline{M}^{\hat{u}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}} = M_Y$.

c) Es ist $M_Y\cap X = M$.

d) $(Y,(\hat{u}|Y)_{\mathfrak{M}_Y})$ ist eine vollständige Hülle von $(X,u_{\mathfrak{M}})$, wobei $\mathfrak{M}_Y = \{M_Y;\ M\in\mathfrak{M}\}$ ist.

B e w e i s: a) folgt aus der Folgerung von Beh.1 und durch direkte Rechnung. b) ist ebenfalls eine Folgerung aus der Folg. der Beh.1. Da $M = \overline{M}^{\hat{u}} \cap X$ (M ist abgeschlossen), folgt c). Insgesamt folgt, daß $(Y,(\hat{u}|Y)_{\mathfrak{M}'})$ der Abschluß von X in $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$ ist. Es genügt somit zu zeigen, daß $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$ vollständig ist. Für separierte l.k. Räume (X,u) folgt das aus Satz 1, §1, Kap.II . Im nichtseparierten Fall kann man wegen Beh.2 durch Übergang zu $X/\overline{\{0\}}$ den separierten Fall erreichen.

3. Ein Kriterium für die Dichtheit von $(X,u_{\mathfrak{M}})$ in $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$.

Nach Satz 1 ist X genau dann dicht in $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$, wenn $X+\overline{M}^{\hat{u}} = \hat{X}$ für alle $M \in \mathfrak{M}$. Wenn wir beachten, daß $X/M \cong X+\overline{M}^{\hat{u}}/\overline{M}^{\hat{u}}$ (vgl. Bourbaki, [2], §2, Prop. 21), so bedeutet das:

BEHAUPTUNG 3.- $(X,u_{\mathfrak{M}})$ ist genau dann dicht in $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$, wenn gilt $X/M \cong \hat{X}/\overline{M}^{\hat{u}}$ für alle $M \in \mathfrak{M}$.

Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $X/M = \hat{X}/\overline{M}^{\hat{u}}$, läßt sich aus dem folgenden Lemma zusammen mit Beh.3 gewinnen:

LEMMA.- Sei X eine topologische Vektorgruppe und L ein abgeschlossener Teilraum von X. Sind X/L und L vollständig, so ist auch X vollständig. (Vgl. [2], Kap. III, §3, ex. 8).

B e w e i s des Lemmas: sei $q:\hat{X} \longrightarrow \hat{X}/L$ kanonisch. Da L vollständig ist, ist $\hat{X}/L$ separiert. Da q(X) ein dichter und vollständiger Teilraum von $\hat{X}/L$ ist, folgt $\hat{X}/L = X/L$, also $\hat{X} = X$.

BEHAUPTUNG 4.- Ist X/M vollständig für alle $M \in \mathfrak{M}$, dann ist $(X,u_{\mathfrak{M}})$ dicht in $(\hat{X},\hat{u}_{\mathfrak{M}})$.

Denn nach Lemma und weil $X/M = X+\overline{M}^{\hat{u}}/\overline{M}^{\hat{u}}$, ist $X+\overline{M}^{\hat{u}}$ $\hat{u}$-vollständig, also gleich $\hat{X}$.

Die letzte Bedingung ist offenbar auch notwendig, wenn (X,u) halbmetrisierbar ist.

BEHAUPTUNG 5.- Sei $(X,u)$ metrisierbar und $\hat{u}_{\mathfrak{M}}$-dicht. Ist $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert, so ist auch u tonneliert.

B e w e i s: Sei T eine u-Tonne. T ist eine $u_{\mathfrak{M}}$-Tonne, also eine $u_{\mathfrak{M}}$-NU. Damit ist auch $\overline{T}^{\hat{u}}$ eine $\hat{u}_{\mathfrak{M}}$-NU. D. h. es gibt eine geeignete $\hat{u}|\overline{M}^{\hat{u}}$-NU U (für ein $M\in\mathfrak{M}$) mit $U\subset\overline{T}^{\hat{u}}$. Damit ist $\overline{T}^{\hat{u}}$ absorbant auf $X+\overline{M}^{\hat{u}} = \hat{X}$ und damit eine $\hat{u}$-Tonne d.h. eine NU. Es folgt, daß $T = \overline{T}^{\hat{u}}\cap X$ eine u-NU ist.

## §2. Tonneliertheitsfragen für $(X,u_{\mathfrak{M}})$

Die Frage nach der Tonneliertheit von $(X,u_{\mathfrak{M}})$ spielt eine besondere Rolle beim Satz von Pták (vgl. Kap.VI, §2) und bei Sätzen vom ähnlichen Typ.

### 1. Beispiele tonnelierter Vektorgruppen.

Eine l.k. Vektorgruppe $(X,u_{\mathfrak{M}})$, die tonneliert ist, haben wir bereits in Abschnitt 1, §2, Kap. IV kennengeler t. Eine leichte Verallgemeinerung dieses Beispiels ist der folgende Satz:

SATZ 1.- Sei X ein $\mathbb{K}$-linearer Raum und $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis aus abzählbarvielen Teilräumen von X. Jedes $M\in\mathfrak{M}$ trage eine Fréchetraumtopologie $u_M$ und das System $(u_M)_{M\in\mathfrak{M}}$ sei gerichtet. Dann ist $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert.

Denn mit Satz 1, §1, Kap.II ist $(X,u_{\mathfrak{M}})$ eine Fréchetgruppe.

Eine weitere Verallgemeinerung des obigen Beispiels bildet die folgende Behauptung:

BEHAUPTUNG 1.- Sei (X,u) ein abzählbarkodimensionaler Raum eines Fréchetraums und sei $\mathfrak{M}$ eine abzählbare Filterbasis aus abgeschlossenen Teilräumen von X. Dann ist $(X,u_{\mathfrak{M}})$tonneliert.

B e w e i s: Nach Satz 1 in §1 gilt für die Vervollständigung Y von $(X,u_{\mathfrak{M}})$ die Relation $X\subset Y\subset\hat{X}$. Daher hat X eine abzählbare Kodimension in Y und ist nach Satz 2, §2, Kap. IV tonneliert.

Man kann sich von der Voraussetzung der Abzählbarkeit von $\mathfrak{M}$ befreien. Das ist der Gegenstand der nächsten Behauptung.

BEHAUPTUNG 2.- Sei $(X,u)$ ein l.k. Raum und $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis aus tonnelierten Teilräumen von X. Für jedes gerichtete, abzählbare $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ sei $u_{\mathfrak{N}}$ tonneliert. Dann ist $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert.

B e w e i s: Sei H eine punktweise beschränkte Menge von stetigen Linearformen auf $(X,u_{\mathfrak{M}})$. Wir zeigen, daß H $u_{\mathfrak{M}}$-gleichgradig stetig ist. Wenn es ein $M_o \in \mathfrak{M}$ gibt, so daß alle $h|M_o$ $(h \in H)$ $u|M_o$-stetig sind, so folgt das aus dem Satz von Banach-Steinhaus. Im anderen Fall existiert $M_1 \in \mathfrak{M}$ und $f_1 \in H$, so daß $f_1|M_1$ unstetig ist. Sei $M_2 \in \mathfrak{M}$ so, daß $f_1|M_2$ stetig und $M_2 \subset M_1$. Es existiert wieder $f_2 \in H$, so daß $f_2|M_2$ unstetig ist. u.s.w. Durch Induktion erhält man so eine Folge $(f_n)_n$ in H und eine absteigende Folge $(M_n)_n = \mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$, so daß $f_n|M_n$ unstetig ist und daß $f_n|M_{n+1}$ stetig ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $F = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ eine punktweise beschränkte Menge von stetigen Linearformen auf $(X,u_{\mathfrak{N}})$. F ist aber nicht gleichgradig stetig. Dies widerspricht der folgenden Behauptung:

BEHAUPTUNG 3.- Eine l.k. Vektorgruppe ist genau dann tonneliert, wenn jede punktweise beschränkte Menge von stetigen Linearformen darauf gleichgradigstetig ist.

Das ist nämlich die genaue Bedingung dafür, daß ihr loc-Bild tonneliert ist (vgl. Kap. IV, §1, Folg.1 zu Beh.3 und Satz 1, §2).

Als Folgerung der Beh. 2 folgt nun

SATZ 2.- Sei $(X,u)$ ein abzählbarkodimensionaler Teilraum eines Fréchetraums und $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis aus abgeschlossenen Teilräumen von X. Dann ist $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert.

B e w e i s: Jedes $M \in \mathfrak{M}$ ist selbst ein abzählbarkodimensionaler Teilraum eines Fréchetraums (nämlich von $\overline{M}^X$), also tonneliert. Damit folgt der Satz aus Beh.2 mit Beh. 1.

Die in diesem Abschnitt behandelten Beispiele zeichnen sich dadurch aus, daß ihre Gültigkeit von der Wahl von $\mathfrak{M}$ unabhängig ist. Im nächsten Abschnitt wollen wir solche Beispiele von tonnelierten l.k. Vektorgruppen der Form $(X,u_{\mathfrak{M}})$ kennenlernen, bei denen es auf die Wahl von $\mathfrak{M}$ ankommt.

2. Weitere Beispiele.

Sei P eine nichtleere Menge und $\hat{Y}$ ein vollständiger separierter l.k. Raum. Wir bezeichnen mit $F(P,\hat{Y})$ den linearen Raum aller Abbildungen von P in $\hat{Y}$. Es sei $\hat{Z}$ ein linearer Teilraum von $F(P,\hat{Y})$. $\hat{Z}$ sei versehen mit einer vollständigen separierten l.k. Topologie $\hat{u}$, die feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz. Zu jedem Teilraum $Y \subset \hat{Y}$ können wir einen Teilraum $(Z,w)$ ( mit $w = \hat{u}|Z$) durch $Z = \hat{Z} \cap F(P,Y)$ zuordnen (es ist $Z = \{f \in \hat{Z};\ f(P) \subset Y\}$). Wir betrachten weiter eine aufsteigend gerichtete Menge $\mathfrak{N}$ von Teilmengen von P mit $\bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N = P$. Die Menge der Teilräume $M_N = \{f \in Z; f(N) = 0\}$ liefert eine Filterbasis $\mathfrak{L}$ auf Z. Wir gewinnen mit $w_{\mathfrak{L}}$ neue Beispiele von l.k. Vektorgruppen. Solche Beispiele sind deswegen von besonderem Interesse, weil die gewonnenen Topologien vollständig sind. In der Tat: Sei $(f_a)_{a \in A}$ ein $w_{\mathfrak{L}}$-Cauchynetz. Geben wir uns ein $x \in P$ vor, so existiert $N \in \mathfrak{N}$ mit $x \in N$. Für ein geeignetes $b \in A$ gilt dann $f_a - f_b \in M_N$ für alle $a \geq b$, das bedeutet $f_a(x) = f_b(x)$ für alle $a \geq b$. Damit konvergiert $(f_a)$ punktweise gegen eine Abbildung $f \in F(P,Y)$. Nun ist $(f_a)$ auch ein $\hat{u}$-Cauchynetz, und $\hat{Z}$ ist vollständig. Daher konvergiert $(f_a)$ in $\hat{Z}$. Da die Topologie $\hat{u}$ feiner ist als die Topologie der punktweisen Konvergenz, ist f auch der $\hat{u}$-Limes von $(f_a)$; es gilt somit $f \in \hat{Z} \cap F(P,Y) = Z$. Da $(f_a)$ punktweise residual konstant ist, konvergiert $(f_a)$ auch für $[\mathfrak{L}]$ gegen f, also auch für die obere Grenze von w und $[\mathfrak{L}]$, das ist $w_{\mathfrak{L}}$.

Wir erhalten aus dem obigen Beispiel dann tonnelierte Vektorgruppen (sogar Fréchetgruppen), wenn P metrisierbar und $\mathfrak{N}$ abzählbar ist. Drei besonders interessante Fälle seien angeführt:

Beispiele:

1) Sei $P = \mathbb{N}$, $\mathfrak{N} = \{J \subset \mathbb{N};\ J \text{ endlich}\}$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge normierter Räume und $\hat{Y} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \hat{X}_n$ ($\hat{X}_n$ Vervollständigung von $X_n$). Wir wählen $\hat{Z} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \hat{X}_n$. Mit $Y = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist dann $Z = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

2) P, Y und $\mathfrak{N}$ seien wie in 1). Wir wählen jetzt für $\hat{Z}$ die $l^p$-Summe der $X_n$. Dann ist Z die $l^p$-Summe der $X_n$ (dabei sei $1 \leq p \leq \infty$).

3) Sei jetzt P ein bornologischer l.k. Raum mit einer abzählbaren Basis der beschränkten Mengen (z.B. P normiert), Y normiert und $\mathfrak{N}$ eine abzählbare Menge von Teilmengen von P. Wir versehen $\hat{Z} = L_c(P,\hat{Y})$ mit der Topologie $\hat{u}$ der beschränkten Konvergenz (das ist eine vollständige, l.k., metrisierbare Topologie). Dann ist $Z = L_c(P,Y)$ und $(Z, w_{\mathfrak{L}})$ ist eine Fréchetgruppe.

3. Beispiel eines nichttonnelierten Raums.

Wir knüpfen an das Beispiel 2) im Abschnitt 2. an und setzen voraus, daß alle $X_n$ unvollständig sind. Es sei $p\in[1,\infty\rangle$ und Z bzw. $\hat{Z}$ die $l^p$-Summe der $X_n$ bzw. $\hat{X}_n$ für $n\in\mathbb{N}$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $y_n\in\hat{X}_n\setminus X_n$. Sei ferner $L_o=[y_n;n\geq 1]$ (wir identifizieren $x\in X_n$ mit dem Element $(x_k)_{k\geq 1}\in Z$, wobei $x_n=x$ und $x_k=0$ für $k\neq n$). Wir setzen $L_k=[y_n;n>k]$, $M_k=M_{\{1,..,k\}}=\{x\in Z;\ x_1=0,\ldots,x_k=0\}$ und $X=Z+L_o$ (das ist ein Teilraum von $\hat{Z}$). Es bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der $M_k+L_k$ für $k\in\mathbb{N}$ und sei $u=\hat{u}|X.[\mathfrak{M}]$ ist eine Lineartopologie auf X und offensichtlich gilt $(X,[\mathfrak{M}])=(Z,[\mathfrak{L}])\overset{+o}{\oplus}(L_o,[(L_k)_{k\geq 1}])$.

BEHAUPTUNG 4.- Es bezeichne K die abgeschlossene Einheitskugel in Z. Dann ist die Menge $T=K+L_o$ abgeschlossen für $[\mathfrak{M}]$ aber keine $u_{\mathfrak{M}}$-Nullumgebung. Insbesondere ist $(X,u_{\mathfrak{M}})$ nichttonneliert.

B e w e i s: Es genügt zu zeigen, daß K abgeschlossen ist in $(Z,[\mathfrak{L}])$. Sei $z\in Z$ und $(z^\beta)_{\beta\geq 1}$ eine Folge in K, die für $\mathfrak{L}$ gegen z konvergiert. Die Folge $(z^\beta)_{\beta\geq 1}$ ist komponentenweise fastkonstant. Sei $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann kann man $\alpha\in\mathbb{N}$ so wählen, daß $\sum_{k=\alpha}^{\infty}\|z_k\|^p\leq\varepsilon$. Weiter existiert $\beta\in\mathbb{N}$, so daß $z_k=z_k^\beta$ für $k=1,\ldots,\alpha$. Es folgt nun:

$$\|z\|^p=\sum_{k=1}^{\alpha-1}\|z_k^\beta\|^p+\sum_{k=\alpha}^{\infty}\|z_k\|^p\leq 1+\varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon$ beliebig ist, folgt $z\in K$.

Wir können jetzt behaupten, daß $(x,u_{\mathfrak{M}})$ nichttonneliert ist. In der Tat: T ist eine $u_{\mathfrak{M}}$-Tonne (sogar eine $[\mathfrak{M}]$-Tonne). Aber T ist keine $u_{\mathfrak{M}}$-Nullumgebung. Sonst wäre $2(T\cap\overline{K}^{\hat{u}}\cap(M_k+L_k))$ für ein geeignetes $k\in\mathbb{N}$ eine Nullumgebung in $(M_k+L_k,\hat{u}|M_k+L_k)$. Diese Menge enthält aber $\overline{K}^{\hat{u}}\cap L_k+K\cap M_k$. D.h. $M_k+L_k$ ist die topologisch direkte Summe von $M_k$ und $L_k$ (für $\hat{u}$). Das kann nicht sein, da $L_k\subset\overline{M}_k^{\hat{u}}$.

## §3. Geradenprodukte

### 1. Lineartopologische Produkträume.

Der $\mathbb{K}^I$ sei mit der Produkttopologie $\mathfrak{S}$ versehen; $\mathfrak{M}$ sei eine Filterbasis aus $\mathfrak{S}$-abgeschlossenen Teilräumen von $\mathbb{K}^I$.

BEHAUPTUNG 1.- $(\mathbb{K}^I,[\mathfrak{M}])$ ist ein tonnelierter lineartopologischer Raum.

B e w e i s: Wir zeigen die Behauptung zunächst für den Fall eines abzählbaren $[\mathfrak{M}]$. In diesem Fall ist $[\mathfrak{M}]$ halbmetrisierbar. Wir zeigen, daß es außerdem vollständig ist. Dazu sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine $[\mathfrak{M}]$-Cauchyfolge. Zu jedem $M\in\mathfrak{M}$ existiert ein $n(M)\in\mathbb{N}$ mit $x_n-x_m\in M$ für alle $n,m\geq n(M)$. Sei $\mathfrak{L}$ die Menge der affinen Teilräume $x_{n(M)}+M$ für $M\in\mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{L}$ endlich und nicht leer und $n(L)=\max\{n(M);M\in\mathfrak{U}'\}$, so gilt $x_{n(M)}+M=x_{n(L)}+M$ für alle $M\in\mathfrak{N}$. Daher ist $\bigcap_{M\in\mathfrak{N}}(x_{n(M)}+M)=x_{n(L)}+\bigcap_{M\in\mathfrak{N}}M\neq\emptyset$, und das bedeutet, daß $\mathfrak{L}$ eine Filtersubbasis ist. Nun ist $\mathbb{K}^I$ linearkompakt (nach G. Köthe [6], §10, N°10) und besteht aus abgeschlossenen affinen Teilräumen. Es existiert also $x\in x_{n(M)}+M$ für alle $M\in\mathfrak{L}$. Das bedeutet $x_n\in x+M$ für alle $n\geq n(M)$. $x$ ist $[\mathfrak{M}]$-Limes der Folge $(x_n)_{n\geq 1}$. Wenn $\mathfrak{N}$ nicht notwendigerweise abzählbar ist, können wir uns nach Beh.2, §2 auf den Fall eines abzählbaren $\mathfrak{M}$ zurückziehen (Dabei sei $u$ die triviale Topologie auf $\mathbb{K}^I$ und also $u_{\mathfrak{M}}=[\mathfrak{M}]$).

SATZ 1.- $(\mathbb{K}^I,\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}})$ ist tonneliert.

B e w e i s: Sei $\mathfrak{H}_M$ die Menge der endlichkodimensionalen, abgeschlossenen Teilräume von $M$. Dann ist $\mathfrak{N}=\bigcup_{M\in\mathfrak{M}}\mathfrak{H}_M$ eine Filterbasis auf $\mathbb{K}^I$. Nach Beh. 1 ist $[\mathfrak{N}]$ tonneliert. Jede $\mathfrak{S}_{\mathfrak{M}}$-Tonne $T$ ist somit eine $[\mathfrak{N}]$-Nullumgebung. Man kann also $M\in\mathfrak{M}$ so finden, daß $M\cap T$ absorbant ist auf $M$ und daß $H\subset T$ für ein geeignetes $H\in\mathfrak{H}_M$. Damit ist aber $T\cap M$ eine Nullumgebung für $\mathfrak{S}|M$.

### 2. Eine Anwendung auf Produkträume.

SATZ 2.- $Y$ sei ein normierter Raum und $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis auf $\mathbb{K}^I$ aus abgeschlossenen Teilräumen. $H$ sei eine punktweise beschränkte Menge von linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^I$ in $Y$. Zu jedem $f\in H$ gebe es ein $M\in\mathfrak{M}$ mit $N(f)\supset M$. Dann existiert $L\in\mathfrak{M}$ mit $f(L)=0$ für alle $f\in H$.

B e w e i s: H besteht aus $[\mathfrak{m}]$-stetigen Abbildungen. Daher ist H gleichgradigstetig (Satz 3, §2, Kap.IV). Ist K die Einheitskugel von Y, so gilt somit $f(L) \subset K$ für ein geeignetes $L \in \mathfrak{m}$ und alle $f \in H$. Es folgt $f(L) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} K = \{0\}$ für alle $f \in H$.

FOLGERUNG.- Sei $\mathfrak{F}$ eine Filterbasis auf I und H eine punktweise beschränkte Menge von Linearformen auf $\mathbb{K}^I$. Zu jedem $f \in H$ existiere $J \in \mathfrak{F}$ mit $f(\mathbb{K}^J) = 0$. Dann existiert $J_0 \in \mathfrak{F}$ mit $f(\mathbb{K}^{J_0}) = 0$ für alle $f \in H$.

# KAPITEL VI: ANWENDUNGEN AUF LOKALKONVEXE RÄUME

## §1. Verschiedene Sätze über l.k. Räume

### 1. Ein Satz über absolutkonvexe absorbante Mengen.

SATZ 1.- Sei $(X,u)$ ein l.k. Raum und $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis aus abgeschlossenen Teilräumen von X. Die l.k. Vektorgruppentopologie $u_{\mathfrak{M}}$ sei tonneliert. Dann existieren zu jeder absolutkonvexen und absorbanten Teilmenge $T\subset X$ ein $L\in\mathfrak{M}$ und eine Nullumgebung U, so daß $U\cap M\subset \overline{T\cap M}^{u}$ für alle $M\in\mathfrak{M}$ mit $M\subset L$.

B e w e i s: Nach Formel (1) in §1, Kap. V und weil $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert ist folgt, daß für eine geeignete u-NU U und ein $L\in\mathfrak{M}$ gilt: $U\cap L\subset T+2\overline{T\cap M}$ für alle $M\in\mathfrak{M}$. Ist $M\subset L$, so erhält man hieraus $U\cap M\subset 3\overline{T\cap M}$. (Denn $U\cap M\subset (T+2\overline{T\cap M})\cap M$ und $\overline{T\cap M}\subset \overline{M}=M$).
Aus Satz 2, §2, Kap. V und Satz 1, §3, Kap.V folgt nun

FOLGERUNG.- Es sei $(X,u)$ entweder ein Produkt von Geraden oder ein abzählbarkodimensionaler Teilraum eines Fréchetraums. Sei T eine absolutkonvexe absorbante Teilmenge von X und $\mathfrak{M}$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Teilräumen von X. Dann gibt es eine u-NU U, so daß $U\cap M\subset \overline{T\cap M}$ für alle $M\in\mathfrak{M}$.

### 2. Ein Satz über $l^p$-Summen von normierten Baire-Räumen.

Die folgende Beh. ist ein Spezielfall von (2.1) bei Oxtoby [9] .

BEHAUPTUNG 1.- Seien X und Y separabele metrische Räume und $(G_n)$ eine Folge von dichten offenen Teilmengen von $X\times Y$. X sei ein Baireraum. Dann existiert ein $x\in X$, so daß $G_n(x)=\{y\in Y;(x,y)\in G_n\}$ dicht ist für alle $n\in\mathbb{N}$.

SATZ 2.- Es sei $(X_n)$ eine Folge von separablen normierten Baireräumen. Für jede reelle Zahl p mit $1\leq p<\infty$ ist dann die $l^p$-Summe $(Z,u)$ der $X_n$ ein Baireraum.

B e w e i s: Sei $M_k=\{z\in Z;\ z_n=0 \text{ für } n=1,\dots,k\}$ und $\mathfrak{M}=\{M_k;k\in\mathbb{N}\}$. Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von dichten offenen Mengen in Z und $G\subset Z$ eine offene nichtleere Menge. Die Menge $G\cap G_1$ ist nicht leer. Daher existiert eine nichtleere offene Teilmenge $U_1$ von $X_1$ und eine

nicht leere offene Teilmenge $V_1$ von $M_1$ mit $\delta(V_1)<1$ ($\delta$ für Durchmesser), so daß gilt

$$U_1+V_1 \subset G \cap G_1$$

($Z=X_1+M_1$ ist topologisch direkt). Nach Beh. 1 existiert $z_1 \in U_1$, so daß $(z_1+V_1)\cap G\cap G_n$ dicht in $z_1+V_1$ ist für alle $n\in\mathbb{N}$. Nun existieren eine nichtleere offene Teilmenge $U_2$ von $X_2$ und eine nichtleere offene Teilmenge $V_2$ von $M_2$ mit $\delta(V_2)<\frac{1}{2}$, so daß gilt

$$z_1+U_2+\overline{V}_2 \subset (z_1+V_1)\cap G\cap G_2.$$

Wegen Beh.1 existiert $z_2\in U_2$, so daß $(z_1+z_2+V_2)\cap G\cap G_n$ dicht in $z_1+z_2+V_2$ ist für alle $n\in\mathbb{N}$. So fortfahrend erhält man eine Folge $(z_k)$ von Punkten $z_k\in X_k$ und eine Folge $(V_k)$ von Mengen $V_k\subset M_k$ mit $\delta(V_k)<\frac{1}{k}$, so daß für alle $k\in\mathbb{N}$ gilt $z_1+\ldots+z_{k+1}+\overline{V}_{k+1} \subset (z_1+\ldots+z_k+V_k)\cap G\cap G_k$. Offenbar konvergiert die Folge $(z_1+\ldots.z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $(Z,u_{\mathfrak{M}})$ gegen ein Element von $G\cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

## §2. Verallgemeinerung eines Satzes von V. Pták

### 1. Der Satz von Pták.

In [10] bewies V. Pták den folgenden Satz (Satz (2.2)):

SATZ 1.- Es seien (X,p) ein Banachtaum und (Y,q) l.k. und normiert. Sei H eine punktweise beschränkte Menge von linearen Abbildungen von X in Y. Für jedes $f\in H$ sei N(f) abgeschlossen. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $F\subset H$ und ein $\varrho>0$, so daß $\|f(x)\|_q \leq \varrho \|x\|_p$ für alle $x\in N(F)$. und alle $f\in H$.

Die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes läßt sich innerhalb der Theorie der l.k. Vektorgruppen leicht beweisen.

SATZ 2.- Es seien (X,u) lokalkonvex und Y normiert. H sei eine punktweise beschränkte Menge von linearen Abbildungen von X in Y. Es sei ferner $\mathfrak{M}$ eine Filterbasis von Teilräumen von X, so daß es zu jedem $f\in H$ ein $M\in\mathfrak{M}$ gibt mit: f|M stetig. Die l.k. Vektorgruppentopologie $u_{\mathfrak{M}}$ sei tonneliert. Dann existiert ein $L\in\mathfrak{M}$, so daß H L gleichgradig stetig ist

Bevor wir Satz 2 beweisen, wollen wir zeigen, daß er Satz 1 verallgemeinert. Wir setzen $\mathfrak{M} = \{N(G); G\in H\}$ endlich und u=Topologie von X. Dann ist $u_{\mathfrak{M}}$ tonneliert (Satz 2, §2, Kap.V). Die Aussage von Satz1 entspricht dann, für die dort beschriebene Situation, der Aussage von

Satz 2, denn gleichgradige Stetigkeit für $u_{\mathfrak{M}}$ im Falle eines normierten Raums Y ist mit der Ungleichung von Satz 1 identisch.

B e w e i s von Satz 2: H besteht aus $u_{\mathfrak{M}}$-stetigen Abbildungen und ist punktweise beschränkt. Nach Satz 3, §2, Kap.IV ist damit H $u_{\mathfrak{M}}$-gleichgradig stetig. Ist K die abgeschlossene Einheitskugel in Y so ist für ein geeignetes $L \in \mathfrak{M}$ und eine u-NU $U \subset X$ stets $f(U \cap L) \subset K$ für alle $f \in H$. D.h. H/L ist gleichgradig stetig.

Angewendet auf abzählbar-kodimensionale Teilräume von Fréchet-räumen oder auf Geradenprodukte liefert Satz 2:

FOLGERUNG.- Seien (X,u) l.k. und Y normiert. X sei ein abzählbarkodimensionaler Teilraum eines Frechétraums oder eines Geradenprodukts (d.h. eines $\mathbb{K}^I$). H sei eine punktweise beschränkte Menge von linearen Abbildungen von X in Y. Für eine Filterbasis $\mathfrak{M}$ aus abgeschlossenen Teilräumen von X gelte, daß es zu jedem $f \in H$ ein $M \in \mathfrak{M}$ gibt, so daß f/M stetig ist. Dann gibt es ein $L \in \mathfrak{M}$, so daß H/L gleichgradig stetig ist.

## 2. Über die Voraussetzungen des Satzes von Pták.

Im Gegensatz zum Satz von Pták macht die Verallgemeinerung in Satz 2 keinerlei Voraussetzungen über die besondere Gestalt von (X,u) ( im Satz 1 ist (X,u) ein Banachraum ). Das kommt natürlich nur dadurch zustande, daß die Voraussetzungen in Satz 1 über die spezielle Gestalt von (X,u) und von $\mathfrak{M}$ die Tonneliertheit von $(X,u_{\mathfrak{M}})$ implizieren. Im Satz 2 dagegen wird die Tonneliertheit von $u_{\mathfrak{M}}$ explizit verlangt. In der Praxis kann es im allgemeinen schwierig sein, die Tonneliertheit eines Raums der Form $(X,u_{\mathfrak{M}})$ nachzuweisen. Man ist daher geneigt, das Vorgehen im Satz 1 nachzumachen, durch spezielle Voraussetzungen über (X,u) und $\mathfrak{M}$ die Tonneliertheit von $(X,u_{\mathfrak{M}})$ zu gewährleisten (vgl. Folgerung zu Satz 2). Man könnte an die beiden folgenden Voraussetzungen denken:

1) (X,u) ist normiert, $\mathfrak{M}$ besteht aus abgeschlossenen tonnelierten Teilräumen.
2) (X,u) ist normiert, $\mathfrak{M}$ besteht aus abgeschlossenen Baire'schen Teilräumen

Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, daß weder 1) noch 2) ausreichen, die Gültigkeit von Satz 2 zu bewirken.

Worüber man sich bei den Voraussetzungen zum Ptak'schen Satz noch weitere Gedankem machen kann, ist, ob man Y durch allgemeinere Raumtypen ersetzen kann. Im Rahmen der Theorie der l.k. Vektorgruppen läßt sich leicht ein ähnlicher Satz ( zu Satz 2 ) aufstellen, in dem Y ein beliebiger l.k. Raum ist. Man braucht nur die Konklusion im Satz 2, daß es ein $L \in \mathfrak{M}$ gibt, so daß $H|L$ gleichgradig stetig ist, zu ersetzen durch die Aussage, daß H $u_{\mathfrak{M}}$-gleichgradig stetig ist. Es fragt sich nur, ob die Bedeutung dieser Aussage dieselbe ist, wie im Satz 2 für einen normierten Raum Y. Das ist nicht der Fall. Ein Beispiel hierzu bringen wir im §3.

Zusammenfassend kann man folgendes sagen. Der Ptak'sche Satz ist ein Spezialfall des Satzes von Banach-Steinhaus für l.k. Vektorgruppen der Gestalt $(X, u_{\mathfrak{M}})$. Daß man die gleichgradige Stetigkeit für $u_{\mathfrak{M}}$ innerhalb der Theorie der l.k. Räume deuten kann, liegt an der Tatsache, daß Y normiert ist. Die Tonneliertheit von $u_{\mathfrak{M}}$ im Ptak'schen Satz wird gewährleistet durch spezielle Voraussetzungen an X und $\mathfrak{M}$.

Zum Schluß machen wir noch folgende Bemerkung: Im Satz 1 gibt es zu jedem $f \in H$ einen Teilraum $M \in \{N(G);\ G \subset H \text{ endlich}\}$, so daß $f|M$ eine sehr spezielle stetige Abbildung ist, nämlich die O-Abbildung. Man überlegt sich leicht: um die Aussage von Satz 1 erschließen zu können, braucht man nicht die volle Tonneliertheit von $(X, u_{\mathfrak{M}})$[1] auszunutzen. Man muß lediglich wissen, daß jede Tonne im linear-topologischen Raum $(X, \mathfrak{M})$ eine $u_{\mathfrak{M}}$-NU ist ( Ist K die abgeschlossene Einheitskugel von Y, dann ist die Menge $T = \bigcap_{f \in H} f^{-1}(K)$ in Satz 1 eine $\mathfrak{M}$-Tonne). Man könnte glauben, daß diese Voraussetzung, die schwächer ist als Tonneliertheit, ausreichen würde, um etwa unter den Voraussetzungen 1) und 2) von oben wenigstens die Aussage von Satz 1 machen zu können. Aber selbst das ist nicht der Fall, siehe Beispiel 2, §3.

---

[1] Wobei in Satz 1 $\mathfrak{M} = \{N(G);\ G \subset H \text{ endlich}\}$

## §3. Beispiele und Gegenbeispiele zum Satz von Pták

1. Beispiel: Wir zeigen hier, daß man selbst im Falle eines Banachraums auf die Voraussetzung, daß $N(f)$ abgeschlossen ist für jedes $f\in H$, im Satz 1 nicht verzichten kann. Dazu betrachten wir einen Banachraum $X$ mit einem dichten, abzählbarunendlich-kodimensionalen Baire'schen Teilraum $M$. Für eine Kobasis $(a_n)_{n\geq 1}$ von $M$ definieren wir Linearformen $f_k$ durch $f_k(a_n) = \delta_{nk}$ und $f_k|M = 0$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Die Menge $H$ dieser $f_k$ ist punktweise beschränkt. Ferner ist $M$ und daher auch $N(G)$ tonneliert für jedes $G\subset H$. Es gibt aber keine endliche Teilmenge $F\subset H$, so daß $H|N(F)$ gleichgradig stetig ist. Denn zu jeder echten Teilmenge $F\subset H$ existiert $f_m\in H$, so daß $f_m(N(F)) \neq 0$. Da $M$ dicht ist in $N(F)$, kann $f_m|N(F)$ nicht stetig sein.

2. Beispiel: Wir wollen hier das auf Seite 41 angekündigte Beispiel eines normierten Baireraums bringen, in dem für eine Filterbasis $\mathfrak{M}$ aus abgeschlossenen **Baireschen** Teilräumen der Satz von Pták nicht gilt. Wir werden einen **normierten** Raum $(X,u)$ und einen normierten Raum $Y$, sowie eine Folge $H$ von punktweise beschränkten linearen Abbildungen von $X$ in $Y$ angeben, so daß die Menge $\mathfrak{M} = \{N(F); F\subset H \text{ endlich}\}$ eine Filterbasis aus abgeschlossenen Baireschen Teilräumen liefert, aber $H|N(F)$ für keine endliche Teilmenge $F\subset H$ gleichgradig stetig ist. Sei hierzu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unvollständiger separabler normierter Baireräume, $L$ die $l^p$-Summe der $X_n$ und $\hat{L}$ die $l^p$-Summe der $\hat{X}_n$ (dabei $1\leq p < \infty$). Wir definieren Projektionen $Pr_k$ und $P_k$ auf $\hat{L}$ durch

$$Pr_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_k \qquad \text{und}$$

$$P_k = \sum_{l=1}^{k} Pr_l, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Sei nun für jedes $n\in\mathbb{N}$ $z^n\in\hat{L}$ mit $z^n{}_k = 0$ für $k \neq n$ und $z^n{}_n \notin X_n$. Wir setzen $X = L + [z^n; n\in\mathbb{N}]$ (die Summe ist algebraisch direkt). Sei $P$ der (unstetige) Projektor auf $L$ parallel zu $[z^n; n\in\mathbb{N}]$. Wir setzen $H = \{P\circ P_k|X; k\in\mathbb{N}\}$. Es ist $N(P\circ P_k|X) = l^p((X_n)_{n>k}) + [z^1,\ldots,z^k]$ abgeschlossen in $X$ und Bairesch (nach Satz 2, §1). Offenbar ist $\mathfrak{M} = \{N(P\circ P_k|X);\ k\in\mathbb{N}\}$. Bezeichnet $E$ die abgeschlossene Einheitskugel von $L$, so ist $P\circ P_k(E + [z^n; n\in\mathbb{N}]) \subset E$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Daher ist $H$ punktweise beschränkt. Nun ist aber $P\circ P_{k+1}|P_{k+1}(X)\cap N(P\circ P_k|X) = P|Pr_k(X)$ unstetig für jedes $k\in\mathbb{N}$. Mit $Y = L$ erhalten wir nun das angekündigte Beispiel.

3. Beispiel: Wir wollen in diesem Beispiel zeigen, daß man in Satz 1 den Raum Y nicht durch einen metrisierbaren Raum ersetzen kann. Dazu setzen wir voraus, daß es für jedes $n\in\mathbb{N}$ ein Paar $(X_n,Y_n)$ von l.k. Räumen und eine Menge $H_n\subset L(X_n,Y_n)$ gibt, so daß

i) $X_n$ ein Banachraum und $Y_n$ normiert ist,

ii) $H_n$ punktweise beschränkt und $N(f)$ abgeschlossen ist f.a. $f\in H_n$,

iii) für keine Teilmenge $F\subset H_n$ mit $\mathrm{Card}(F)<n$ ist $H_n|N(F)$ gleichgradig stetig.

(Nach einer mündlichen Mitteilung von V. Pták an W. Roelcke soll B.E. Johnson solche Beispiele konstruiert haben.)

Es sei dann X die $l^2$-Summe der $X_n$ und Y das Produkt der $Y_n$. X ist ein Banachraum und Y ein metrisierbarer l.k. Raum. Für jedes $(f_n)_{n\geq 1}\in\prod_{n\in\mathbb{N}}H_n$ sei definiert $f(x)=(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für $x\in X$, und H sei die Menge solcher Abbildungen. Man sieht leicht, daß H punktweise beschränkt ist. Für jedes $f\in H$ mit definierender Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $N(f)$ die $l^2$-Summe der $N(f_n)$, also abgeschlossen in X. Für keine endliche Teilmenge $F\subset H$ ist aber $H|N(F)$ gleichgradig stetig. In der Tat: $N(F)\cap X_n$ ist von Form $N(F_n)$ mit $F_n\subset H_n$ und $\mathrm{Card}(F_n)\leq \mathrm{Card}(F)$. Mit $H|N(F)$ ist auch $H_n|N(F_n)$ gleichgradig stetig. Das ist aber unmöglich sobald $n\geq\mathrm{Card}(F)$.

## §4. Tonneliertheit von $L_c(P,Y)$

In diesem Paragraphen seien P,Y separierte l.k. Räume. Wir versehen $L_c(P,Y)$ mit der Topologie w der beschränkten Konvergenz.

BEHAUPTUNG 1.- $P = R \overset{\text{top}}{\oplus} N$ sei die topologische direkte Summe aus R und dem endlich dimensionalen Teilraum N. Wir setzen ( wie schon in Kap. V, §2, N°2, Bp. 2) ) $M_N = \{f \in L_c(P,Y);\ f(N) = 0\}$ und $M_R = \{f \in L_c(P,Y);\ f(R) = 0\}$ Sei p der stetige Projektor auf N mit Kern R. Dann gelten:

i) $L_c(P,Y) = M_R \overset{\text{top}}{\oplus} M_N$. Die lineare Abbildung $Pr(f) = f \circ p$ von $L_c(P,Y)$ in sich liefert einen stetigen Projektor auf $M_R$ mit Kern $M_N$.

ii) $M_R$ ist isomorph zu $Y^{\dim(N)}$.

Zum Beweis vergleiche man mit [7]. Es ist leicht zu sehen, daß Pr ein Projektor auf $M_R$ mit Kern $M_N$ ist. Jede beschränkte Menge in P liegt in der Summe von kreisförmigen, beschränkten Mengen $B \subset N$, $C \subset R$. Ist V eine Y-Nullumgebung und $T(B+C,V)$ die Menge der $f \in L_c(P,Y)$ mit $f(B+C) \subset V$, dann gilt $T(B+C,V) \supset P(T(B+C,V)) = T(B,V) \cap M_R$, woraus i) folgt. ii) ist leicht zu sehen.

SATZ 1.- Sei P abzählbardimensional und bornologisch, Y metrisierbar und tonneliert und w metrisierbar (das ist z.B. der Fall, wenn X normiert ist). Dann ist $L_c(P,Y)$ tonneliert.

B e w e i s: Wir knüpfen an Kap. V, §2, N°2, Bp. 2) an. Es gibt eine Folge $\mathfrak{N}$ von endlichdimensionalen Teilräumen von P, so daß $P = \bigcup_{N \in \mathfrak{N}} N$. Wir erinnern daran, daß mit $\mathfrak{L} = \{M_N;\ N \in \mathfrak{N}\}$ die l.k. Vektorgruppentopologie $w_{\mathfrak{L}}$ tonneliert ist. Sei T eine w-Tonne, also auch eine $w_{\mathfrak{L}}$-Tonne. Damit ist T eine $w_{\mathfrak{L}}$-Nullumgebung. Es existiert somit $N \in \mathfrak{N}$, w-Nullumgebung U, so daß $U \cap M_N \subset T$. Außerdem ist mit einem topologisch direkten Summanden R von N auch $M_R$ tonneliert (nach Beh.1 ii) ). Also gibt es eine w-Nullumgebung V, so daß $V \cap M_R \subset T$. Damit ist aber $U \cap M_N + V \cap M_R \subset 2T$, also ist T eine w-Nullumgebung (nach Beh.1 ii) ).

Offen ist weiterhin die Frage, ob $L_c(P,Y)$ tonneliert ist, wenn P ein Banachraum und Y ein tonnelierter normierter Raum ist.

# L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S


[1] Bourbaki, N. : Espaces vectoriels topologiques, Chap. I-II (1966), Chap.III-V (1964), Hermann Paris.

[2] Bourbaki, N. : Topologie generale, Chap.III (1960), Hermann Paris.

[3] Iyahen, S. O. : On certain classes of topological vector-spaces, Proc. Lond. Math. Soc. 18 (1968) 285-307.

[4] Kelley, J. L. : Hypercomplete linear topological spaces, Michigan Math. J. Volume 5 (1958).

[5] Kenderov, P. : On topological vector groups, Math. USSR Sbornik 10 (1970) 531-546.

[6] Köthe, G. : Topologische lineare Räume, Springerverlag (1960).

[7] Lurje, P. : Über Räume stetiger linearer Abbildungen, Diplom-arbeit an der Universität München, 1969.

[8] Mitchel, B. : Theory of categories, Academic Press (1965).

[9] Oxtoby, J.C. : Cartesian products of Baire spaces, Fund. Math. 49 (1961).

[10] Pták, V. : A uniform boundedness theorem and mappings into spaces of operators; Stud. Math. 31 (1968).

[11] Raikov, D. A. : On B-complete topolocical vector groups, Stud. Math. 31 (1968).

[12] Valdivia, M. : Absolutely convex sets in barrelled spaces, erscheint in den Ann. Institut Fourier.

LEBENSLAUF

Ich wurde geboren am 7.1.1946 in Lodz, Polen, als Sohn von Jerzy und Anna Lurje (geborene Traube). Meine Eltern wanderten 1950 nach Deutschland aus.

Ich besuchte die Primarschule in Tel-Aviv, Israel. Seit April 1958 bin ich in München. Ich trat 1958 in die Gisela ORS ein, ich schloß sie im Juli 1965 mit dem Abitur ab.

Zwischen 1965 und Juli 1969 studierte ich Mathematik an der Ludwig-Maximilians Universität in München. Ich diplomierte im Juli 1969.

Seit dem 15. April 1970 bin ich wissenschaftlicher Mitarbeiter an der technischen Universität München.

Pawel Lurje